Postřehy o tom, co si gymnazisté myslí o matematice

Mgr. Martin Krynický, Gymnázium, Třeboň

Během své praxe (v letech 2000 až 2009) na gymnáziu ve Strakonicích jsem postupně zjistil, že způsob, který žáci uvažují o matematice, kterým se ji snaží učit a kterým se pokoušejí dostát požadavkům na ně kladeným, se značně liší od způsobu, který bych já jako učitel považoval za správný a který byl u žáků mlčky předpokládán při mé přípravě na vysoké škole.
Když jsem si to konečně připustil, rozhodl jsem se přizpůsobit svůj výukový styl této realitě a od září 2007 jsem se začal pokoušet o nový (jak jej sám nazývám proaktivní) styl výuky. Abych zajistil větší podíl samostatné práce žáků během hodin a zabránil bezduchému opisování z tabule, všechny hodiny předem připravuji na počítači a snažím se jejich maximální část věnovat sledu příkladů a problémů, které mají studenti řešit samostatně. V nutných případech vysvětluji klasicky u tabule, jak je to možné přecházíme k samostatné práci žáků, která probíhá podle zadání promítaného z počítače. Během samostatné práce žáků neustále kontroluji situaci ve třídě, pomáhám žákům, kteří mají problémy, v případě potřeby koriguji práci třídy od tabule. Kontrolu správnosti provádíme opět pomocí počítače, kde jsou všechny úkoly vyřešené a můžeme je promítnout projektorem na dobu dostatečnou ke kontrole a příliš krátkou na to, aby si žáci, kteří předtím sami nepracovali, mohli řešení opsat do sešitu. Při přípravě hodin počítám s tím, že všichni žáci nemohou stihnout vše, všichni však mají kompletní texty k dispozici na internetu.
Původně jsem metodu zaváděl v jediné třídě (4B2011), během tří měsíců se ukázala překvapivě účinnou a tak jsem na ni přešel nejen ve své druhé třídě první dva roky vyučované klasicky (4B2009), ale i při výuce fyziky. Tím, že jsem při hodinách důsledně nechával žáky pracovat samostatně a cíleně jsem je přiváděl do situací, kdy nestačilo pouze mechanicky opakovat postupy z předchozích příkladů, jsem získal úplně nový přístup k tomu, co si (zejména Ti, kteří nepatří mezi několik málo nejlepších) o látce skutečně myslí a jak ji sami v sobě interpretují.
V září 2009 (poté, co jsem ve Strakonicích kromě zmíněných tříd učil matematiku proaktivně ještě v 8O2012) jsem se s rodinou přestěhoval do Třeboně, kde jsem převzal matematiku ve dvou třídách (4.2011 a 4.2012). Poprvé ve své praxi jsem tak vyučoval třídy, které na gymnáziu učil matematiku někdo jiný.
V příspěvku bych rád upozornil na některé zajímavé postřehy o tom, jak gymnazisté interpretují, vnímají a používají informace, které se jim ve škole snažíme předat. Důrazně upozorňuji, že nejde o kritiku mých kolegů, kteří učili zmiňované třídy přede mnou (některé zážitky se týkají pouze tříd, které jsem učil jen já). Mé postřehy odpovídají tomu, čeho jsem si všiml i v průběhu suplování a výkony všech zmiňovaných tříd jsou v rámci našich škol zcela standardní. U všech postřehů odkazuji na konkrétní hodiny ze své učebnice [1].

Řešení kvadratických rovnic dosazením do vzorce (hodina 010101 Kvadratické rovnice [1]) je úplně první hodinou v učebnici (zkušenosti s třídami 4B2011 a 8O2012). Vcelku bez problémů projde třída úvodní částí hodiny, zádrhel nastává u příkladu 4. Ačkoliv studenti mají zapsaný vzorec v sešitě a dokáží určit hodnoty koeficientů, čekají až učitel začne počítat (takový příklad přece ještě nedělali). Následuje několik nervózních minut a teprve poté, co se žáci několikrát ujistí, že se nedočkají řešení na tabuli, se váhavě dají do práce. Ačkoliv příklad neobsahuje žádné složité výpočty, téměř polovina žáků udělá při výpočtu chybu, mnoho z nich už při opisování zadání. Ukazuje se (i v mnoha jiných situacích), že žáci většinou nevychází z vět a pravidel, ale čekají až na řešení prvního konkrétního příkladu, které se poté snaží opakovat. Podobně nejsou zvyklí pečlivě psát, protože při opisování z tabule není přesnost nutná. I když udělají chybu, po opsání dalšího „rovná se“ z tabule ji zase „opraví“.

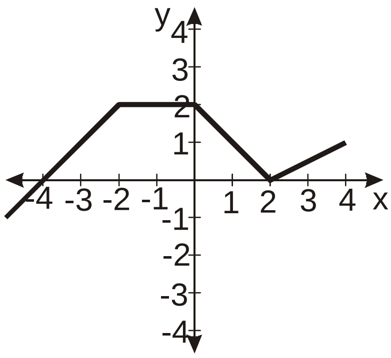
Způsob, jakým žáci uplatňují předvedené postupy, je dobře patrný v hodině 020502 Doplnění na čtverec [1]. Hodina je uvedená příkladem na nakreslení grafu funkce $y = x^2 - 2x$. Příklad samostatně vyřeší pouze velmi nadprůměrní žáci, ostatním na tabuli ukáži, že vzorec $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ nám umožní se zbavit nadbytečného *x*. Řešení zůstává na tabuli, žáci pak pokračují samostatně v řešení dalších příkladů. Sled je připraven tak, aby žáci, kteří nepoužívají vzorec $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ ale jiná svá pravidla založená většinou na prostém přesouvání čísel z jednoho místa na druhé, opakovaně nebyli úspěšní (bližší popis v textu hodiny). Přesto, že se žáci s takto vedenou hodinou rozhodně nesetkávají poprvé, značná část z nich se raději drží vlastních nefunkčních pravidel (nad jejichž používáním není nutné přemýšlet) než pravidla, které funguje obecně, ale jehož uplatnění vyžaduje zamyšlení. Extrémní zkušeností pak byla tato hodina ve 4.1011, kde probíhala jako opakování před kapitolou o kuželosečkách a část třídy se mě snažila přesvědčit, že vzorec je zbytečně složitý, když stačí do závorky k *x* napsat polovinu čísla před *x* v zadání. Od jiných žáků jsem se pak dozvěděl, že tato hodina (stejně jako většina ostatních) neobsahuje žádné procvičování, protože každý příklad je trochu jiný než předchozí a správné procvičování se sestává se stejných příkladů, které se liší pouze v číslech.

Hodina 010504 Prvočísla a složená čísla sleduje postup používaný v klasické gymnazijní sadě učebnic [2, strana 111]. Na dvou složených čísel si žáci ozkoušejí, že různými cestami dojdou ke stejnému prvočíselnému rozkladu. Pak následuje znění Základní věty aritmetiky. Příklad 4 pak ověřuje, zda jsou žáci schopni propojit konkrétní rozklady čísel s obecným zněním matematické věty. Ve třech třídách (4B2009, 4B2011 a 8O2012) se našel pouze jediný student, který byl schopen příklad správně vyřešit. Ostatní žáci se začali přidávat teprve ve chvíli, kdy se na tabuli objevilo obecné znění s konkrétním příkladem a začaly se porovnávat čísla na jednotlivých pozicích. Zejména koncept *k* jako proměnné, která umožňuje obecně zapsat různě dlouhé prvočíselné rozklady, je žákům zcela cizí. Upozorňuji, že věta byla uvedena jako obecné tvrzení o předchozích dvou příkladech a po jejím zapsání přes mé výzvy nikdo nekladl žádné dotazy.

Další ukázkou toho, jak studenti vstřebávají postupy předávané učitelem, je hodina 020704 Grafy mocninných funkcí [1]. V druhé polovině hodiny (v příkladu 5) se řeší náčrtek grafu funkce $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ pomocí grafu funkce $y = x^2 - 1$ (převracení grafu). Žáky samozřejmě nenapadne využít hodnot funkce $y = x^2 - 1$ na vytváření převrácených hodnot, které tvoří graf funkce $y = \frac{1}{x^2 - 1}$. Příklad řeším u tabule po krocích (vyznačených v hodině). Po každém kroku mají žáci čas na pokus o samostatné vyřešení další části grafu. Poslední tři kroky pak samostatně zvládá velká většina z nich. Následuje příklad 6, místo správného řešení však polovina třídy zkopíruje řešení předchozího příkladu a pouze ho posune o dva výše (jak je posunutý graf funkce $y = x^2 + 1$). Jakmile mají žáci možnost, opouští logický postup a vracejí se k bezdůvodnému opakování předchozích příkladů.

Zajímavého efektu jsem si všiml při výuce analytické geometrie ve třídě 4.2011. Ačkoliv třída byla celou dobu vedena podle učebnice důsledně k tomu, aby chápala sestavování rovnic přímek jako logický postup, který musí reagovat na konkrétní zadání, hodina 070307

Přímková smršť prokázala, že pro nadpoloviční většinu třídy látka zdegenerovala do dvou manuálních postupů:
a) vem body, udělej vektor a dosaď ho do parametrického vyjádření,
b) vem body, udělej vektor, „otoč“ vektor a dosaď ho do obecné rovnice.
Žáci nebyli schopni sebemenšího přizpůsobení situaci, která se odlišovala od nejjednoduššího zadání, látku hodiny jsme neprobrali ani během dvou vyučovacích hodin, musel jsem zavést povinné kreslení obrázků a některé žáky neustále kontrolovat.
Nasazením hodiny v cvičení z matematiky se pak ukázalo, že v jiných třídách mají tyto problémy i studenti s jedničkou z matematiky.



Aby příspěvek nepůsobil zcela beznadějně zařadíme i optimističtější zkušenosti. V hodinách 020412 až 020414 [1] probíráme kreslení grafu obecné funkce, kde se studenti naučí, jak různé změny zadání ovlivňují výsledný graf na příkladu funkce zadané pouze obrázkem. Tyto obecné zkušenosti pak používáme ke kreslení grafů dalších funkcí. Po těchto třech vyučovacích hodinách dokázala polovina třídy napsat za 22,5 minuty na 100% písemku s jiným tvarem funkce a tímto zadáním: **1.** a) $y = f(x) - 2$ b) $y = \left| f(x+1) \right|$ **2.** $y = f(2x) + 1$ **3.** $y = -f(|x|)$ **4.** $y = 2 \cdot f(0{,}5x - 1)$ **BONUS:** $y = \left| f(1 - |x|) - 2 \right|$. Dvě třetina pak dosáhly hodnocení výborně. Ukazuje se, že při řešení „izolovaných“ (nevyžadujích příliš mnoho dalších znalostí) problémů jsou žáci až překvapivě úspěšní.

Zajímavé jsou i zkušenosti s hodinou 070103 Vzdálenost bodů. V první části je probrán a procvičen vzorec pro vzdálenost bodů v rovině (zdůrazňuje se, že jde o aplikaci Pythagorovy věty). V příkladu 6 pak mají žáci vybrat správný vzorec pro vzdálenost bodů v prostoru. Postup jsem zkoušel ve třech třídách (v závorce počet úspěšných a neúspěšných odpovědí): 4B2009 (přibližně dvě třetiny správných a třetina špatných), 4.2011 (1 správná, zbytek špatných), 4.2012 (11 správných, 14 špatných). Ukazuje se, že při dlouhodobém boji s protimatematickým přístupem žáků je možné dosáhnout toho, že nepoužívají pouze zdánlivé podobnosti (v třech rozměrech musí být třetí odmocnina), ale začnou přemýšlet i o příčinách (pořád jde o Pythagorovu větu).

Uvedené zkušenosti (a mnohé další) ukazují, že většina gymnazistů dnes přistupuje k matematice způsobem, který není od věci nazvat protimatematickým, jako k množině bezdůvodných a nepochopitelných pravidel o přesouvání číslic a písmenek z místa na místo. Tato skutečnost vysvětluje mnohé z našich neúspěchů a zároveň klade zásadní otazník, zda je možné klasickými postupy dosáhnout takových výsledků, které se od nás očekávají. Na druhou stranu se zdá, že pokud přijmeme tuto skutečnost jako fakt a dlouhodobě se snažíme základní přístup žáků změnit, můžeme dosáhnout někdy až překvapivých výsledků.
Závěrem bych rád poprosil všechny kolegy, kteří mají pocit, že by jejich studenti v popisovaných situacích uspěli lépe, aby zkusili zopakovat popsané postupy ve svých třídách a podělili se o svá zjištění. Lepší pochopení toho, jak studenti pro sebe interpretují to, co ve škole slyší, je pro vylepšování výuky zásadní.
Literatura:

[1] M. Krynický: Učebnice matematiky, www.realisticky.cz
[2] I. Bušek, E. Calda: Matematika pro gymnáziua – Základní poznatky z matematiky, Prométheus, 2003

Několik postřehů z třičtvrtě hodinové diskuse, která po příspěvku (poslednímu v řadě) následovala.
Kolegové ze ZŠ se ptali, jaký největší nedostatek žáci přicházející na gymnázia mají. Podle mého názoru je to skutečnost, že většina z nich vůbec nevnímá obsah školních předmětů jako situace, kdy se věci dějí z nějakého důvodu. Jako otec dvou žákyň ZŠ si pak myslím, že rozhodující roli hraje styl současných učebnic, který nutí děti se smiřovat s fakty, na které přišli „Ti od nás tak odlišní vědci".
Jeden z kolegů připomněl, že přístup žáků k matematice je možné brát jako příklad z teorie her. Žáci se snaží minimalizovat svoji námahu na dosažení cíle (dobré známky). Tento postřeh považuji za správný a je smutnou skutečností, že tolik učitelů tento stav akceptuje a nesnaží se proti jejich vypočítavosti bojovat.
K námitce, že v příspěvku prezentovaný postup znevýhodňuje pracovité, ale méně chytré studenty je třeba dodat, že:

- tento typ studentů znevýhodňuje spíše zvolení způsobu hodnocení, který se staví proti studentským přístupům popisovaným v článku. Fakticky stačí, když písemné práce či zkoušení obsahují dostatečný pocit příkladů, které nejsou jednoduchou obměnou typických příkladů (ukázat žákům, že se matematiku učí špatně není těžké, bohužel většina z nich má zlozvyky natolik zažité, že nejsou schopni bez pomoci systém změnit).
- méně chytří pracovití studenti jsou možná největší obětí tohoto systému, ve kterém odvádějí spoustu práce, ale bez odpovídajících dlouhodobých výsledků.