

1.1.7 Priority početních operací, závorky

Předpoklady: 010106

Př. 1: Vypočti.

a) $3+5+6$

b) $5+3+6$

c) $6+3+5$

a) $3+5+6=14$

b) $5+3+6=14$

c) $6+3+5=14$

Př. 2: Vypočti.

a) $3 \cdot 5 \cdot 6$

b) $5 \cdot 3 \cdot 6$

c) $6 \cdot 3 \cdot 5$

a) $3 \cdot 5 \cdot 6 = 90$

b) $5 \cdot 3 \cdot 6 = 90$

c) $6 \cdot 3 \cdot 5 = 90$

Pokud jenom sčítáme nebo jenom násobíme, nezáleží na pořadí ani na tom, odkud začneme počítat, výsledek je vždy stejný \Rightarrow nemá smysl se zabývat tím, co budeme počítat dřív.

Co se stane, když operace promícháme? Kolik je $3+5 \cdot 6$?

- $3+5 \cdot 6 = 3+30 = 33$
- $3+5 \cdot 6 = 8 \cdot 6 = 48$

Po promíchání operací, jsme různými postupy získali různé výsledky \Rightarrow takhle to nejde, v matematice má být bezesporná, nemůže mít dva výsledky pro jeden výraz \Rightarrow musíme u výrazu $3+5 \cdot 6$ rozhodnout, jaký ze způsobů výpočtu máme na mysli \Rightarrow musíme rozhodnout, která operace má přednost \Rightarrow zkusíme si rozepsat, co vlastně znamená $5 \cdot 6$:

$$3+5 \cdot 6 = 3+6+6+6+6+6 = 33$$

\Rightarrow násobení má přednost před sčítáním (kvůli tomu, že násobení je zkratkou pro opakované sčítání).

Pedagogická poznámka: Jako ve všech podobných případech nestačí, že paní učitelka řkala, že násobení má přednost před sčítáním. Pokud existuje důvod a není příliš složitý, měli by ho žáci znát, aby neustále viděli, že matematika má smysl a nejde o žádné "paní učitelka řkala".

Navíc v tomto případě platí, že žáci příliš nevnímají násobení jako opakované sčítání a toto je jeden z okamžiků, kdy je tato představa zcela zásadní.

Priority početních operací

Pokud není vyznačeno jinak, vyhodnocují se operace v tomto pořadí:

- umocňování, odmocňování,
- násobení, dělení,
- sčítání, odčítání.

Operace se stejnou prioritou vyhodnocujeme zleva doprava.

Př. 3: Který z postupů vyhodnocování výrazu $3+5 \cdot 6$ byl správný?

Správně platí: $3+5 \cdot 6 = 3+30 = 33$.

Př. 4: Vypočti.

a) $3+2 \cdot 3+2 \cdot 5$ b) $3+2^4 \cdot 3+2$ c) $4:2-5 \cdot 3+2-3 \cdot 3$
d) $2:3+\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5}-\frac{2}{3}:\frac{5}{3}$ e) $4:3-5:4 \cdot 6:5$

a) $3+2 \cdot 3+2 \cdot 5 = 3+6+10 = 19$

b) $3+2^4 \cdot 3+2 = 3+16 \cdot 3+2 = 3+48+2 = 53$

c) $4:2-5 \cdot 3+2-3 \cdot 3 = 2-15+2-9 = -20$

d) $2:3+\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5}-\frac{2}{3}:\frac{5}{3} = \frac{2}{3}+\frac{1}{15}-\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{3}+\frac{1}{15}-\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 5+1-2 \cdot 3}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

e) $4:3-5:4 \cdot 6:5 = \frac{4}{3}-\frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{4}{3}-\frac{6}{4} = \frac{4}{3}-\frac{3}{2} = \frac{8-9}{6} = -\frac{1}{6}$

Může se stát, že budeme potřebovat zapsat skutečnost, která odpovídá druhému způsobu vyčíslení výrazu $3+5 \cdot 6 = 8 \cdot 6 = 48$ (koupili jsme nejdříve 3 a pak 5 zlevněných jogurtů za 6 Kč) \Rightarrow potřebujeme způsob, jak vyznačit, že chceme postupovat jinak než ve standardním pořadí \Rightarrow závorky ().

Výraz v závorkách vyčísľujeme nejdříve.

$$(3+5) \cdot 6 = 8 \cdot 6 = 48$$

Př. 5: Vypočti.

a) $3+2 \cdot (3+2) \cdot 5$ b) $(3+2)^2 \cdot 3+2$ c) $3-2 \cdot (4-2)+2-(2+3)$
d) $[4:(2-5) \cdot 3+2-3] \cdot 3$ e) $2:3+\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{5}-\frac{2}{3}\right) : \frac{3}{5}$ f) $4:[3-12:(4 \cdot 6)]:5$

a) $3+2 \cdot (3+2) \cdot 5 = 3+2 \cdot 5 \cdot 5 = 3+50 = 53$

b) $(3+2)^2 \cdot 3+2 = 5^2 \cdot 3+2 = 25 \cdot 3+2 = 75+2 = 77$

c) $3-2 \cdot (4-2)+2-(2+3) = 3-2 \cdot 2+2-5 = 3-4+2-5 = -4$

d) $[4:(2-5) \cdot 3+2-3] \cdot 3 = \left[\frac{4}{(-3)} \cdot 3+2-3\right] \cdot 3 = (-4+2-3) \cdot 3 = (-5) \cdot 3 = -15$

e) $2:3+\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{5}-\frac{2}{3}\right) : \frac{3}{5} = \frac{2}{3}+\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{6-10}{15}\right) \cdot \frac{5}{3} = \frac{2}{3}+\frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{4}{15}\right) \cdot \frac{5}{3} = \frac{2}{3}-\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{18-2}{27} = \frac{16}{27}$

f) $4:[3-12:(4 \cdot 6)]:5 = 4:\left[3-\frac{12}{24}\right]:5 = 4:\left(3-\frac{1}{2}\right):5 = 4:\frac{5}{2}:5 = 4 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{25}$

Př. 6: Které ze závorek v následujících výrazech jsou zapsány zbytečně?

a) $(3+2\cdot 3)+2\cdot [5+3]$

b) $3+(2^2\cdot 3)\cdot 2-(2+3)$

c) $4:(3-5)+3+[(2-3)\cdot 3]$

a) $(3+2\cdot 3)+2\cdot [5+3]=3+2\cdot 3+2\cdot [5+3]=3+2\cdot 3+2\cdot 8=3+6+16=25$

Zbytečné závorky: $(3+2\cdot 3)+2\cdot [5+3]$ (upřednostňují jedno sčítání před druhým).

b) $3+(2^2\cdot 3)\cdot 2-(2+3)=3+2^2\cdot 3\cdot 2-(2+3)=3+24-5=22$

Zbytečné závorky: $3+(2^2\cdot 3)\cdot 2-(2+3)$ (upřednostňují jedno násobení před druhým).

c) $4:(3-5)+3+[(2-3)\cdot 3]=4:(-2)+3+(2-3)\cdot 3=(-2)+3+(-1)\cdot 3=-2$

Zbytečné závorky: $4:(3-5)+3+[(2-3)\cdot 3]$ (vně závorky je sčítání, uvnitř je násobení).

Př. 7: Dopiš závorky do výrazu $5\cdot 5\cdot 5-5\cdot 5$ tak, aby se jeho hodnota rovnala:

a) 100,

b) 600,

c) 0,

d) 500.

a) $5\cdot 5\cdot 5-5\cdot 5=125-25=100$

b) $(5\cdot 5\cdot 5-5)\cdot 5=(125-5)\cdot 5=120\cdot 5=600$

c) $5\cdot 5\cdot (5-5)\cdot 5=5\cdot 5\cdot 0\cdot 5=0$

d) $5\cdot (5\cdot 5-5)\cdot 5=5\cdot (25-5)\cdot 5=5\cdot 20\cdot 5=500$

Př. 8: Zdůvodni, proč má umocňování přednost před násobením.

Zkusíme na příkladu:

- $3\cdot 2^3=3\cdot 2\cdot 2\cdot 2=6\cdot 4=24,$
- $3\cdot 2^3=3\cdot 8=24,$
- $(3\cdot 2)^3=6^3=216$

Umocňování je opakované násobení \Rightarrow má přednost před násobením (podobně jako násobení před sčítáním).

Shrnutí: I priority početních operací vycházejí z toho, co operace znamenají.