1.1.12 Poměry a úměrnosti II

Předpoklady: 010111

U následujících úloh je nutné poznat, zda jde o přímou nebo nepřímou úměrnost případně příklad, který není možné řešit ani jedním z obou postupů.

Pedagogická poznámka: Studenti příklady řeší sami. Kontrolu provádíme po 2, 3, 5 příkladě. Šestý příklad počítáme na tabuli, protože asi polovina studentů ho nedokáže spočítat sama. Pokud necháte žáky, aby složené úměry řešili doopravdy sami (což je jediná smysluplná varianta) budete potřebovat téměř dvě hodiny. Já je této problematice věnuji. V té druhé mají rychlejší žáci hotovo a tak si počítají příklady se sbírky.

Pedagogická poznámka: Příklady 1 a 2 (4 a 5) tvoří dvojice, které se tváří jako velmi podobné, ale každý z nich vede na jiný typ úměrnosti. Snahou je, aby žáci postupovali podle smyslu úlohy ne podle povrchní podobnosti s úlohou předchozí.

Př. 1: Autobus jedoucí průměrnou rychlost 75 km/h urazí vzdálenost do hlavního města za 2,5 hodiny. Za jak dlouho urazí vzdálenost osobní automobil jedoucí průměrnou rychlost 85 km/h.

Vzdálenost nutná k uražení je stále stejná, při větší rychlosti bude čas kratší $\Rightarrow$ nepřímá úměrnost.

75 km/h … 2,5 hodiny
85 km/h … x hodin

$$75\cdot 2,5 = 85x$$

$$x = \frac{75\cdot 2,5}{85} = 2,2 \text{ hodiny}$$

Automobil urazí vzdálenost za 2,2 hodiny.

Př. 2: Osamělý cyklista v úniku jede průměrnou rychlostí 42 km/h a do cíle závodu mu zbývá 60 km. Peloton, který jej stíhá, jede díky spolupráci více jezdců průměrnou rychlostí 47 km/h. Jak daleko od cíle musí být peloton, aby cyklistu nedostihl?

Potřebný náskok zjistíme, když budeme vědět, jakou vzdálenost by urazil během jízdy cyklisty v úniku peloton.

větší rychlost $\Rightarrow$ větší vzdálenost $\Rightarrow$ přímá úměrnost

42 km/h … 60 km
47 km/h … x km

Cyklista i peloton musí jet stejnou dobu.

$$\frac{60}{42} = \frac{x}{47}$$

$$x = \frac{60}{42}\cdot 47 \text{ km} = 67,1 \text{ km}$$

Potřebný náskok: $67,1 - 60 \text{ km} = 7,1 \text{km}$.

Cyklista by potřeboval náskok 7,1 km.

Dodatek: Při hodně striktním přístupu by cyklista potřebovat 7,2 km, protože jsme zaokrouhlovali dolů a náskok je tedy menší než nezaokrouhlená hodnota.

Pedagogická poznámka: Původní formulace otázky: " Jaký náskok musí mít cyklista, aby jej peloton nedohonil?" je sice blíže realitě, ale do řešení přidávala krok, který řešení příkladu části žáků hodně komplikoval.

Př. 3: Při radioaktivním rozpadu 4 g látky X zbude po uplynutí poločasu rozpadu dlouhého 2 hodiny, vždy polovina existujících atomů (například po prvních dvou hodin zbudou dva gramy látky). Kolik látky zbude po třech hodinách?

Příklad není možné řešit ani přímou ani nepřímou úměrností. Látka se nerozpadá rovnoměrně (během prvních dvou hodin se rozpadnou 2g, během druhých dvou už jen 1 g) $\Rightarrow$ nejde ani o přímou ani o nepřímou úměrnost.

Dodatek: Předchozí příklad je ukázkou exponenciální závislosti (probírá se v polovině druhého ročníku). Správný výsledek je $4\cdot(0,5)^{\frac{3}{2}} \doteq 1,4142$. Rozhodně není správně 1,5 g, které studenti udávají, i když jde v jejich situaci o slušné přiblížení skutečnosti.

Pedagogická poznámka: Nejchytřejší žáky můžete u předchozího příkladu nechat zdůvodnit, zda správný výsledek bude větší nebo menší než 1,5 g.

Př. 4: 15 litrů látky váží 117 kg. Kolik kg by vážilo 33 litrů látky?

15 litrů … 117 kg
33 litrů … *x* kg
Čím víc látky, tím víc váží $\Rightarrow$ přímá úměrnost.
Každý litr látky váží stejně: $\frac{117}{15}=\frac{x}{33}$.

$x=\frac{117}{15}\cdot 33=257,4\,\mathrm{kg}$

33 litrů látky bude vážit 257,4 kg.

Př. 5: Dvoukilové závaží vyrobené z látky o hustotě 7800 $\mathrm{kg/m^3}$ má objem 0,26 litru. Jaký objem bude mít dvoukilové závaží vyrobené z látky o hustotě 2700 $\mathrm{kg/m^3}$?

7800 $\mathrm{kg/m^3}$ … 0,26 litru
2700 $\mathrm{kg/m^3}$ … *x* litru
Menší hustota, větší objem $\Rightarrow$ nepřímá úměrnost.
Hmotnost závaží je pořád stejná: $7800\cdot 0,26=2700x$.

$x=\frac{7800\cdot 0,26}{2700}0,75\,\mathrm{l}$

Závaží z látky o hustotě 2700 $\mathrm{kg/m^3}$ by mělo objem 0,75 l.

Na závěr tři příklady na dvojitou trojčlenku.

Pedagogická poznámka: Následující příklady nejsou obtížné, pokud si je dokážeme rozdělit na dvě úměrnosti. Bohužel právě to studenti takřka nikdy nedělají a snaží se je řešit najednou. Většinou je nechám, aby si to zkusili a pak je vedu k libovolnému rozdělení na dvě části.
Snažím se jim vysvětlit, že rozdělení na menší částí je obecnou metodou, jak řešit nepřehledné situace, vyžaduje však přehledný zápis, který pomáhá udržet orientaci řešitele o tom, kde se zrovna nachází. Jde o první příležitost, kdy se žáci s tímto problémem v učebnici setkají, proto se dá očekávat obrovský rozptyl v úspěšnosti i rychlosti. Přesto u tabule krokuji pouze šestý příklad, na dva zbývající nechám třídu rozpadnout a běhám mezi lavicemi, protože považuji za důležité, aby se žáci příkladem prokousali sami s tím, že jim pomáhám odhalovat chyby, které udělají.

Pedagogická poznámka: Doporučuji (i když později to tak nedělám) dodržovat značení v příkladech a pomocnou proměnnou značit *y*. Žákům to pomáhá v orientaci.

Pedagogická poznámka: Hlavně u těchto příkladů je dobré, když studenti do schématu kromě čísel píší, i co čísla znamenají.

Pedagogická poznámka: Většina problémů při řešení následujících příkladů pramení ze špatné orientace. Proto většinou kladu takové otázky, které žákům umožní se zorientovat.

Př. 6: 10 studentů udělá za 6 hodin matematiky do sešitů 48 chyb. Kolik chyb udělá 30 studentů za 120 hodin?

V zadání je nečekaně mnoho údajů.
10 studentů … 6 hodin … 48 chyb
30 studentů … 120 hodin … *x* chyb

Počet chyb závisí na dvou číslech, obě se změnila $\Rightarrow$ řešení prostou úměrou není možné (mění se počet studentů i počet hodin) $\Rightarrow$ zkusíme vyřešit jednodušší příklad, ve kterém se například změní pouze počet studentů a z něj vypočteme konečný výsledek.
Změna počtu studentů
10 studentů … 6 hodin … 48 chyb
30 studentů … 6 hodin … *y* chyb

Prostřední sloupec má stejné hodnoty $\Rightarrow$ můžeme ho vynechat $\Rightarrow$ získáme normální příklad.
10 studentů … 48 chyb
30 studentů … *y* chyb
Víc studentů, víc chyb $\Rightarrow$ přímá úměrnost $\Rightarrow$ $\frac{48}{10} = \frac{y}{30}$.

$y = \frac{48}{10} \cdot 30 = 144$ chyb
Doplníme do původního schématu:
10 studentů … 6 hodin … 48 chyb
30 studentů … 120 hodin … *x* chyb
30 studentů … 6 hodin … 144 chyb
$\Rightarrow$ Spodní dva řádky nám umožňují příklad dořešit.
Změna počtu hodin

30 studentů	…	6 hodin	…	144 chyb
30 studentů	…	120 hodin	…	x chyb

Počet studentů se nemění $\Rightarrow$ počítáme bez něj.

6 hodin	…	144 chyb
120 hodin	…	x chyb

Víc hodin, víc chyb $\Rightarrow$ přímá úměrnost $\Rightarrow$ $\frac{144}{6}=\frac{x}{120}$.

$x=\frac{144}{6}\cdot 120=2880$ chyb

30 studentů udělá za 120 hodin 2880 chyb.

Př. 7: 6 dělníků vykope dva příkopy za 12 dní. Za kolik dní vykope 10 dělníků 3 příkopy?

Stejně složitý příklad jako předchozí.

6 dělníků	…	2 příkopy	…	12 dní
10 dělníků	…	3 příkopy	…	x dní

Počet dní závisí na dvou číslech, obě se změnila $\Rightarrow$ rozdělíme příklad na dva normální (více možností).

Změna počtu dělníků

6 dělníků	…	2 příkopy	…	12 dní
10 dělníků	…	2 příkopy	…	y dní

Prostřední sloupec má stejné hodnoty $\Rightarrow$ vynecháme jej a tak získáme běžný příklad.

6 dělníků	…	12 dní
10 dělníků	…	y dní

Víc dělníků, méně času $\Rightarrow$ nepřímá úměrnost $\Rightarrow$ $6\cdot 12=10\cdot y$.

$y=\frac{6\cdot 12}{10}=7,2$ dne

Doplníme do původního schématu.

6 dělníků	…	2 příkopy	…	12 dní
10 dělníků	…	3 příkopy	…	x dní
10 dělníků	…	2 příkopy	…	7,2 dne

$\Rightarrow$ Spodní dva řádky nám umožňují příklad dořešit.

Změna počtu příkopů

10 dělníků	…	2 příkopy	…	7,2 dne
10 dělníků	…	3 příkopy	…	x dní

Počet dělníků se nemění $\Rightarrow$ počítáme bez něj.

2 příkopy	…	7,2 dne
3 příkopy	…	x dní

Víc příkopů na vykopání, víc dnů práce $\Rightarrow$ přímá úměrnost $\Rightarrow$ $\frac{7,2}{2}=\frac{x}{3}$.

$x=\frac{7,2}{2}\cdot 3=10,8$ dne

10 dělníků vykope 3 příkopy za 10,8 dne..

Př. 8: 5 čerpadel o výkonu 50 l/s napustí bazén za 30 minut. Za jak dlouho napustí bazén 3 čerpadla o výkonu 60 l/s.

5 čerpadel … 50 l/s … 30 min
3 čerpadla … 60 l/s … x min

Počet minut závisí na dvou číslech, obě se změnila $\Rightarrow$ rozdělíme příklad na dva normální (více možností).

Změna počtu čerpadel
5 čerpadel … 50 l/s … 30 min
3 čerpadla … 50 l/s … y min

Prostřední sloupec má stejné hodnoty $\Rightarrow$ vynecháme jej.
5 čerpadel … 30 min
3 čerpadla … y min
Víc čerpadel, méně času $\Rightarrow$ nepřímá úměrnost $\Rightarrow$ $5\cdot 30 = 3\cdot y$.

$$y = \frac{5\cdot 30}{3} = 50 \text{ minut}$$

Doplníme do původního schématu.
5 čerpadel … 50 l/s … 30 min
3 čerpadla … 60 l/s … x min
3 čerpadla … 50 l/s … 50 min

Změna výkonu čerpadel
3 čerpadla … 50 l/s … 50 min
3 čerpadla … 60 l/s … x min

Počet čerpadel se nemění $\Rightarrow$ počítáme bez něj.
50 l/s … 50 min
60 l/s … x min
Větší výkon čerpadel, kratší čas napouštění $\Rightarrow$ nepřímá úměrnost $\Rightarrow$ $50\cdot 50 = x\cdot 60$.

$$x = \frac{50\cdot 50}{60} = \frac{125}{3} \doteq 41{,}67 \text{ minut}$$

3 čerpadla o výkonu 60 l/s naplní bazén za 42 minut.

Př. 9: Pět princezen protančí za tři plesy, které trvají šest hodin, dvacet párů střevíců. Kolik střevíců protančí osm princezen za pět plesů, které trvají sedm hodin?

5 princezen ... 3 plesy ... 6 hodin ... 20 párů
8 princezen ... 5 plesů ... 7 hodin ... x párů

Ještě složitější příklad než předchozí $\Rightarrow$ rozložíme na více částí, v každé se od prvního řádku přiblížíme k druhému.

5 princezen ... 3 plesy ... 6 hodin ... 20 párů
8 princezen ... 3 plesy ... 6 hodin ... y párů
Více princezen, více protančených párů $\Rightarrow$ přímá úměrnost $\Rightarrow$ $\frac{20}{5} = \frac{y}{8}$ $\Rightarrow$ $y = \frac{20}{5}\cdot 8 = 32$
8 princezen ... 3 plesy ... 6 hodin ... 32 párů
8 princezen ... 5 plesů ... 7 hodin ... x párů

8 princezen ... 3 plesy ... 6 hodin ... 32 párů
8 princezen ... 5 plesů ... 6 hodin ... *z* párů

Více plesů, více protančených párů $\Rightarrow$ přímá úměrnost $\Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{z}{5} \Rightarrow z = \frac{32}{3} \cdot 5 = 53,3$.

8 princezen ... 5 plesů ... 6 hodin ... 53,3 párů
8 princezen ... 5 plesů ... 7 hodin ... *x* párů

Více hodin, více protančených párů $\Rightarrow$ přímá úměrnost $\Rightarrow \frac{53,3}{6} = \frac{x}{7} \Rightarrow x = \frac{53,3}{6} \cdot 7 = 62,2$.

Osm princezen protančí za pět plesů, které trvají sedm hodin 62 párů střevíců.

Pedagogická poznámka: Používání desetinných čísel v mezivýpočtech není samozřejmě ideální, ale v tuto chvíli je pro žáky nejjednodušší. Je zbytečné jim řešení komplikovat, mají s ním dost starostí.

Shrnutí: Při řešení příkladů, kde nevíme předem, zda jde o přímou nebo nepřímou úměrnost, musíme nejdříve přemýšlet o tom, zda situace splňuje podmínky úměrnosti.