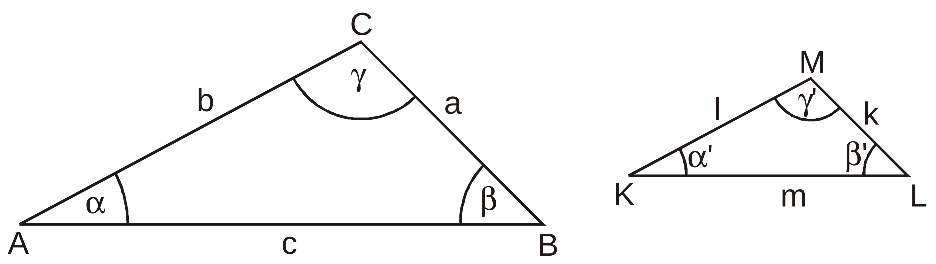
1.1.16 Podobnosti trojúhelníků, goniometrické funkce

Předpoklady: 010104, úhel

Pedagogická poznámka: Začátek zrychlit.



Trojúhelníky ABC a KLM na našem obrázku mají stejný tvar (vypadají stejně), ale liší se velikostí. Říkáme, že jsou si podobné.
Jak tuto skutečnost vyjádřit exaktně?
Například tím, že KLM je několikrát (budeme psát k krát) menší než ABC. Každá jeho strana tedy musí být k krát menší než odpovídající strana trojúhelníků ABC.
Pomocí rovnic (**věta sss**):

$$|KL| = k|AB|$$
$$|LM| = k|BC|$$
$$|KM| = k|AC|$$

Toto lze již exaktně ověřit.
Ze všech rovnic můžeme vyjádřit k: $k = \frac{|KL|}{|AB|} = \frac{|LM|}{|BC|} = \frac{|KM|}{|AC|}$.

Další věty o podobnosti
Věta sus:

$$|KL| = k|AB|$$
$$\alpha = \alpha'$$
$$|KM| = k|AC|$$

Věta uu:

$$\alpha = \alpha'$$
$$\beta = \beta'$$

(i třetí dvojice úhlů se musí rovnat, protože součet všech tří úhlů je $180°$).

Důsledek **věty uu** pro pravoúhlý trojúhelník
Dva pravoúhlé trojúhelníky jsou si podobné, pokud se shodují v jednom nepravém úhlu (jasné, druhý úhel do **věty uu** je ten pravý) $\Rightarrow$ pro pravoúhlé trojúhelníky stačí jeden shodný nepravý úhel a hned jsou si podobné.

Př. 1: Rozhodni, které z následujících dvojic trojúhelníku jsou si podobné. U každé jsou zadány délky stran.
a) 12, 18, 24 36, 18, 27 b) 15, 20, 18 9, 11, 12

a) 12, 18, 24 36, 18, 27
Srovnáme délky podle velikosti (abych věděl co k čemu patří) a pak spočtu poměry.

12, 18, 24 18, 27, 36

$\frac{12}{18} = k = \frac{2}{3}$ $\frac{18}{27} = k = \frac{2}{3}$ $\frac{24}{36} = k = \frac{2}{3}$

Oba trojúhelníky jsou si podobné.

b) 15, 20, 18 9, 11, 12

Srovnáme délky podle velikosti (abych věděl co k čemu patří) a pak spočtu poměry.

15, 18, 20 9, 11, 12

$\frac{15}{9} = k = \frac{5}{3}$ $\frac{18}{11} = k = \frac{18}{11}$ $\frac{20}{12} = k = \frac{5}{3}$

Trojúhelníky si nejsou podobné.

Pedagogická poznámka: Značný počet žáků zapomene uspořádat strany podle velikosti.

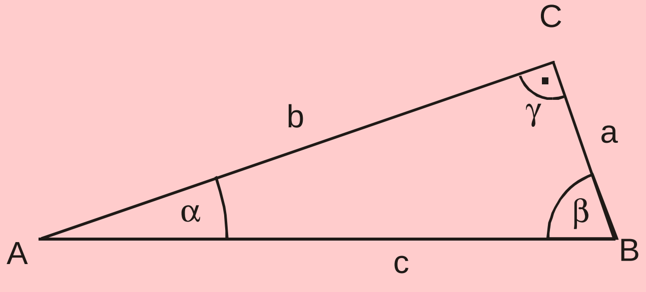
Začátek rovnosti poměrů stran: $k = \frac{|KL|}{|AB|} = \frac{|LM|}{|BC|}$. Upravíme na $\frac{|KL|}{|LM|} = \frac{|AB|}{|BC|}$ (pomocí značení pro strany $\frac{a}{c} = \frac{k}{m}$) $\Rightarrow$ ze vztahu mezi stranami různých trojúhelníků jsme získali vztah mezi stranami téhož trojúhelníka.

Odvozený vzorec se dá přečíst takto: Dva trojúhelníky jsou si podobné, když mají stejný poměr kratší odvěsny a přepony (podle našeho obrázku).

Použijeme na pravoúhlý trojúhelník s úhlem α (všechny pravoúhlé trojúhelníky s úhlem α jsou si podobné) $\Rightarrow$ **pro libovolný pravoúhlý trojúhelník získáme stejný poměr některých dvou stran například a/c (protilehlá odvěsna/přepona)**.

Poměr a/c je tedy dán velikostí úhlu α, je jedno přes jaký pravoúhlý trojúhelník ho spočteme $\Rightarrow$ poměr a/c je vlastně funkcí úhlů. Tuto funkci nazýváme sinus a je velmi důležitá jako spojnice mezi úhly (tvarem) a stranami (velikostí).

Přehled goniometrických funkcí pravoúhlého trojúhelníka:



sinus: $\sin\alpha = \frac{protilehlá}{přepona} = \frac{a}{c}$ **cosinus:** $\cos\alpha = \frac{přilehlá}{přepona} = \frac{b}{c}$

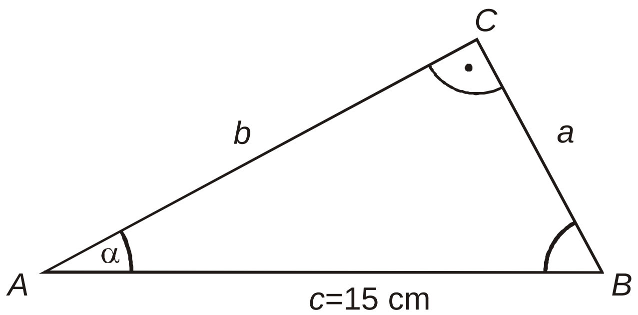
tangens: $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{protilehlá}{přilehlá} = \frac{a}{b}$ **kotangens:** $\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{přilehlá}{protilehlá} = \frac{b}{a}$

Pomocí goniometrických funkcí můžeme například dopočítat velikosti zbývajících stran pravoúhlého trojúhelníku.

Poznámka: Vzorec $\sin\alpha = \frac{protilehlá}{přepona}$ platí vždy, vzorec $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ platí pouze v případě, že písmenkem *a* byla označena protilehlá odvěsna k úhlu α a písmenkem *c* přepona. Při dosazování je důležitý význam čísel ne jejich označení písmenem.

Ve všech následujících příkladech se budeme snažit určit požadované hodnoty přímo z údajů v zadání. Odpadají tak problémy s postupným zkreslováním výsledku několikerým zaokrouhlováním a zmenšuje se pravděpodobnost, že jednou chybou zkazíme i všechny ostatní výpočty.

Př. 2: Pravoúhlý trojúhelník *ABC* s pravým úhlem γ a s úhlem $\alpha = 30°$ má velikost přepony $c = 15\,\text{cm}$. Urči jeho ostatní strany a úhly.



Pro β platí $\beta = 180° - \gamma - \alpha = 180° - 90° - 30° = 60°$.

Pro stranu *a*:

Vystupuje například v poměru: $\frac{protilehlá\,(a)}{přepona} = \frac{a}{c} = \sin\alpha$.

$\sin\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow a = \sin\alpha \cdot c = \sin 30° \cdot 15 = 7,5\,\text{cm}$

Pro stranu *b*: $\cos\alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow b = \cos\alpha \cdot c = \cos 30° \cdot 15 = 13,00\,\text{cm}$.

Vhodný obrázek může řešení příkladu hodně usnadnit. Měl by splňovat minimálně tyto požadavky:

- obsahuje všechny speciální vlastnosti popsané v zadání (pravoúhlost, úhel α je menší než úhel β),
- neobsahuje speciální vlastnosti, které nejsou popsané v zadání (rovnostrannost, rovnoramennost, ...).

Obrázek můžeme použít ke kontrole výsledků.

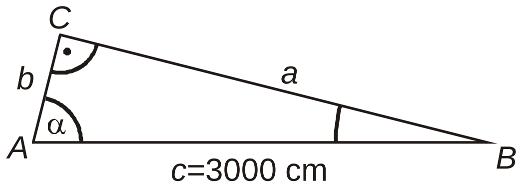
Př. 3: Urči vlastnosti, které musí mít určované délky stran a velikosti úhlů, aby byly v souladu s obrázkem.

Strany *a*, *b* musí být menší než strana *c*. Strana *a* je menší než strana *b*.
Úhel β je větší než úhel α.

Pedagogická poznámka: Diskuse o obrázcích je důležitá, i když se nedá předpokládat, že by žáci ihned začali kreslit užitečné obrázky. Zaokrouhlování v tomto okamžiku neřešíme.

Pedagogická poznámka: Před počítáním s goniometrickými funkcemi je potřeba dát pozor na přepínání jednotek na kalkulačkách D-R-G. Vždycky se najde někdo, kdo má zapnutého něco jiného než stupně.

Př. 4: Pravoúhlý trojúhelník *ABC* s pravým úhlem γ a s úhlem $\alpha = 80°$ má velikost přepony $c = 3000\,\text{cm}$. Urči jeho ostatní strany a úhly.



Pro β platí $\beta = 180° - \gamma - \alpha = 180° - 90° - 80° = 10°$.

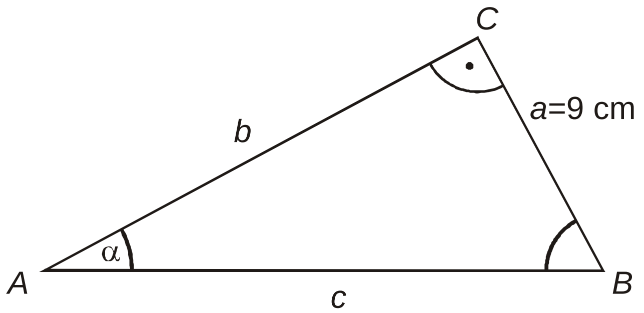
Pro stranu *a*:

Vystupuje například v poměru: $\dfrac{protilehlá\,(a)}{přepona} = \dfrac{a}{c} = \sin\alpha$.

$\sin\alpha = \dfrac{a}{c} \Rightarrow a = \sin\alpha \cdot c = \sin 80° \cdot 3000 = 2954\,\text{cm}$

Pro stranu *b*: $\cos\alpha = \dfrac{b}{c} \Rightarrow b = \cos\alpha \cdot c = \cos 80° \cdot 3000 = 521\,\text{cm}$.

Př. 5: Pravoúhlý trojúhelník *ABC* s pravým úhlem γ a s úhlem $\alpha = 40°$ má velikost odvěsny $a = 9\,\text{cm}$. Urči jeho ostatní strany a úhly.

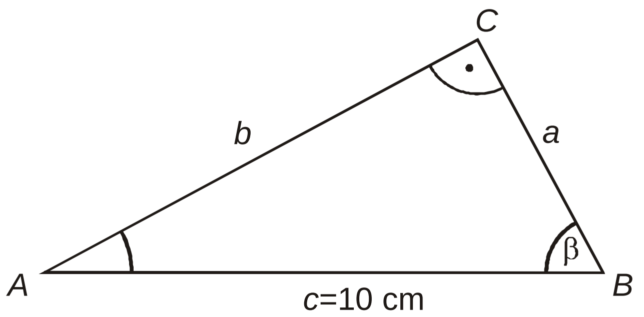


Pro β platí $\beta = 180° - \gamma - \alpha = 180° - 90° - 40° = 50°$.

Pro stranu *c*: $\sin\alpha = \dfrac{a}{c} \Rightarrow c = \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{9}{\sin 40°} = 14{,}00\,\text{cm}$.

Pro stranu *b*: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b} \Rightarrow b = \dfrac{a}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{9}{\operatorname{tg} 40°} = 10{,}73\,\text{cm}$.

Př. 6: Pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem γ a s úhlem $\beta = 50°$ má velikost přepony $c = 10\,\text{cm}$. Urči jeho ostatní strany a úhly.



Pro α platí $\alpha = 180° - \gamma - \beta = 180° - 90° - 50° = 40°$.

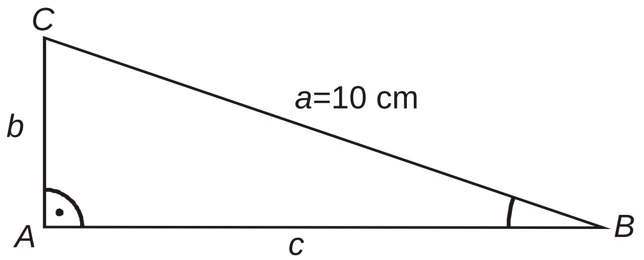
Pro stranu b:

Vystupuje například v poměru: $\dfrac{\textit{protilehlá}\,(b)}{\textit{přepona}} = \dfrac{b}{c} = \sin\beta$.

$\sin\beta = \dfrac{b}{c} \Rightarrow b = \sin\beta \cdot c = \sin 50° \cdot 10 = 7{,}7\,\text{cm}$.

Pro stranu a: $\cos\beta = \dfrac{a}{c} \Rightarrow a = \cos\beta \cdot c = \cos 50° \cdot 10 = 6{,}4\,\text{cm}$.

Př. 7: Přepona v pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem α a s úhlem $\beta = 25°$ má velikost 10 cm. Urči jeho ostatní strany a úhly.



Pravý úhel α $\Rightarrow$ přepona $a = 10\,\text{cm}$ $\Rightarrow$ vyjádření poměrů ve stranách bude jiné než v předchozích příkladech.

Pro γ platí $\gamma = 180° - a - \beta = 180° - 90° - 25° = 65°$.

Pro stranu b:

Vystupuje například v poměru: $\dfrac{\textit{protilehlá}\,(b)}{\textit{přepona}} = \dfrac{b}{a} = \sin\beta$.

$\sin\beta = \dfrac{b}{a} \Rightarrow b = \sin\beta \cdot a = \sin 25° \cdot 10 = 4{,}2\,\text{cm}$

Pro stranu c: $\cos\beta = \dfrac{c}{a} \Rightarrow c = \cos\beta \cdot a = \cos 25° \cdot 10 = 9{,}1\,\text{cm}$.

Shrnutí: Díky tomu, že jsou si všechny pravoúhlé trojúhelníky s ostrým úhlem α podobné můžeme zavést pro úhly goniometrické funkce jako například

$\sin\alpha = \dfrac{\textit{protilehlá odvěsna}}{\textit{přepona}}$.