1.1.17 Použití goniometrických funkcí ve fyzice

Předpoklady: 010116

Pedagogická poznámka: Na probrání fyzikální části hodiny je třeba 25 minut.

Ke každé goniometrické funkci existuje obrácená (správně inverzní) funkce, která z hodnoty poměru stran určuje velikost úhlu. Například pro sinus se jmenuje arcus sinu a na kalkulačkách se většinou značí $\sin^{-1}$.

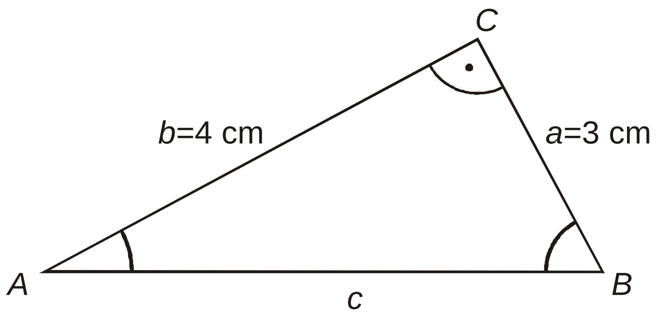
Pro velikosti stran v pravoúhlém trojúhelníku platí Pythagorova věta:

$c^2 = a^2 + b^2$ **slovy**

$(velikost\ přepony)^2 = (velikost\ první\ odvěsny)^2 + (velikost\ druhé\ odvěsny)^2$

Délky stran ve všech příkladech určuj s přesností na dvě desetinná místa, velikosti úhlu s přesností na minuty.

Př. 1: Pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem γ má velikosti odvěsen $a = 3\,\mathrm{cm}$, $b = 4\,\mathrm{cm}$. Urči jeho ostatní strany a úhly.



Pro stranu c: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5\,\mathrm{cm}$.

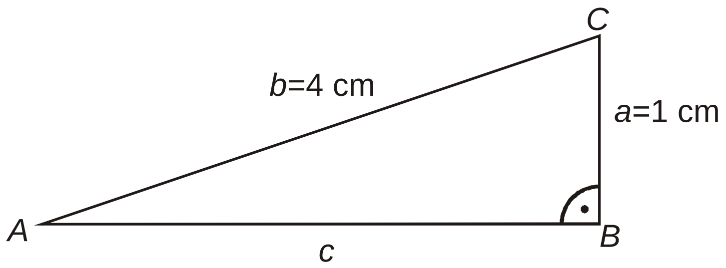
Pro určení úhlů musíme použít obrácené funkce k funkcím goniometrickým.

Pro úhel α: $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow \alpha = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 36{,}87° = 36°52'$.

Pro úhel β: $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{b}{a} \Rightarrow \beta = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53{,}13° = 53°8'$.

Př. 2: V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem β platí: $b = 4\,\mathrm{cm}$, $a = 1\,\mathrm{cm}$. Urči jeho ostatní strany a úhly.

Úhel β je pravý $\Rightarrow$ strana b je přeponou trojúhelníka.



Pythagorova věta: $b^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = b^2 - a^2 \Rightarrow c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{4^2 - 1^2}\text{ cm} = \sqrt{15}\text{ cm}$.
Pro určení úhlů musíme použít obrácené funkce k funkcím goniometrickým.

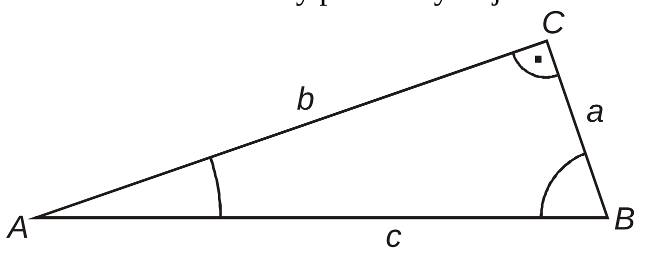
Pro úhel α: $\sin\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 14,48° = 14°29'$.

Pro úhel γ: $\cos\gamma = \frac{a}{b} \Rightarrow \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 75,52° = 75°31'$.

Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu se vyskytují problémy se zaokrouhlováním minut pro úhel α. Připomínám, že výsledky je třeba kontrolovat (součet úhlů $90°$) a v případě nesouladu hledat chybu.
Někteří žáci špatně použijí Pythagorovu větu, vyzívám je k tomu, aby porovnali špatný výsledek (nejdelší je strana *c*) s obrázkem (přeponou je strana *b*).

Př. 3: Pro které hodnoty úhlu α platí $\sin\alpha > \cos\alpha$?

Nakreslíme si libovolný pravoúhlý trojúhelník.



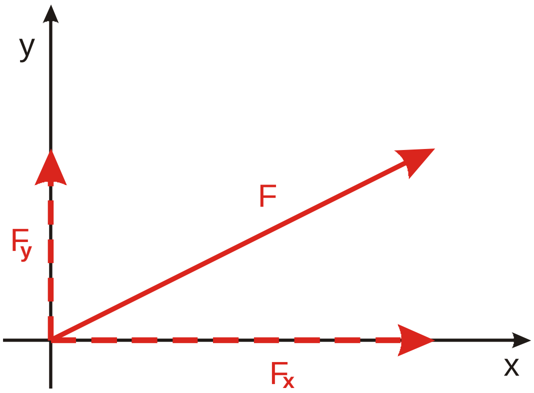
Platí: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$. Jmenovatele obou zlomků jsou stejné $\Rightarrow$ záleží, zda je větší strana *a* nebo strana *b*. Strany *a*, *b* jsou odvěsny trojúhelníku, jsou stejné, když platí $\alpha = \beta = 45°$. Pokud bude $\alpha > 45°$, bude $a > b$ (proti většímu úhlu leží větší strana) a tedy i $\sin\alpha > \cos\alpha$.

Ve fyzice používáme dva hlavní druhy veličin:

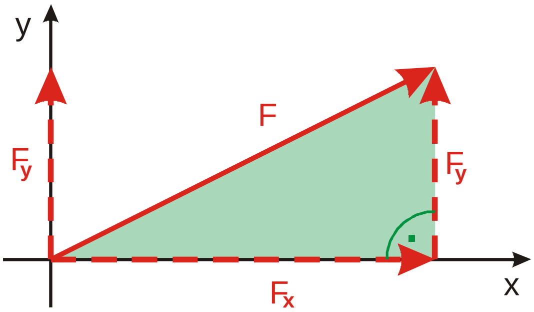
- **skaláry** (například hmotnost) – důležitá je jen velikost (jedno číslo) (ať přidáme věci na váhu jakkoliv, jejich hmotnosti se sčítají),
- **vektory** (například síla) – záleží na velikosti a směru (více čísel) (součet dvou sil záleží nejen na jejich velikosti, ale také na tom zda působí stejným směrem, proti sobě, nebo různými směry).

Vektory se znázorňují šipkou (má velikost i směr).

Často je potřeba rozložit vektor do dvou význačných směrů, nejčastěji na dvě navzájem kolmé části (ve směru zvolených na sebe kolmých souřadných os).



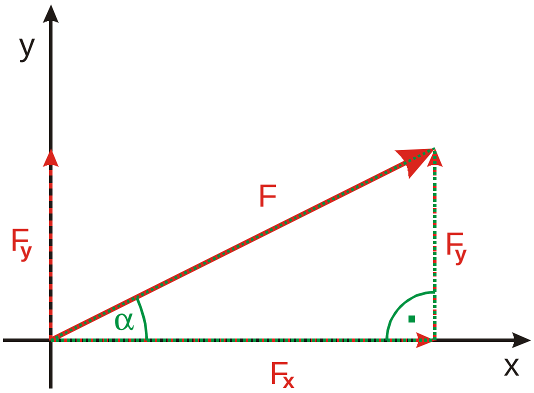
Jednoduché, jakmile si všimneme pravoúhlého trojúhelníka.



Použijeme goniometrické funkce a bude to hračka.

Pedagogická poznámka: Někteří žáci mají s následujícími příklady problémy, protože trojúhelníky nemají popsané vrcholy a oni nemají podle čeho označit vnitřní úhly. Jde o krásnou ilustraci strachu cokoliv podniknout samostatně, neupozorňuji na to před třídou, řeším to individuálně.

Př. 4: Síla o velikosti 50 N svírá s osou *x* úhel $\alpha = 25°$. Urči velikost jejích složek F_x a F_y.

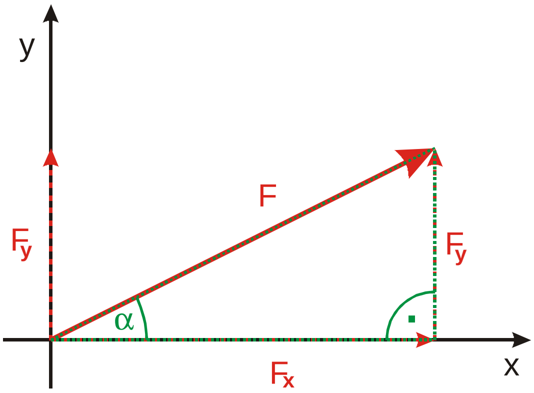


Z obrázku je vidět:

$\sin\alpha = \frac{F_y}{F} \Rightarrow F_y = F \cdot \sin\alpha = 21{,}13\,\mathrm{N}$,

$\cos\alpha = \frac{F_x}{F} \Rightarrow F_x = F \cdot \cos\alpha = 50 \cdot \cos 25° = 45{,}32\,\mathrm{N}$.

Př. 5: Síla má dvě složky $F_x = 8\,\mathrm{N}$ a $F_y = 4\,\mathrm{N}$. Urči velikost síly *F* a úhel, který svírá s osou *x*.

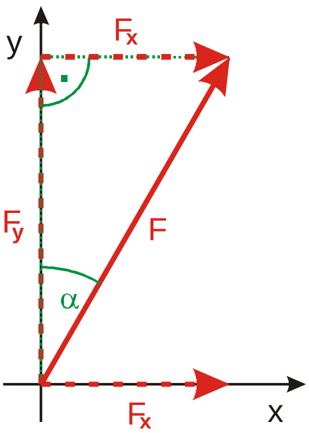


Z obrázku je vidět:

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 \Rightarrow F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 8{,}94\,\mathrm{N}$$

Pro úhel α: $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{F_y}{F_x} \Rightarrow \alpha = \mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{F_y}{F_x}\right) = \mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{4}{8}\right) = 26{,}57° = 26°34'$

Př. 6: Síla o velikosti 50 N svírá s osou *y* úhel $\alpha = 35°$. Urči velikost jejích složek F_x a F_y.



Z obrázku je vidět:

$$\sin\alpha = \frac{F_x}{F} \Rightarrow F_x = F\cdot\sin\alpha = 50\cdot\sin 35° = 28{,}69\,\mathrm{N}$$

$$\cos\alpha = \frac{F_y}{F} \Rightarrow F_y = F\cdot\cos\alpha = 50\cdot\cos 35° = 40{,}96\,\mathrm{N}$$

Shrnutí: Složky vektorů se počítají stejně jako strany pravoúhlých trojúhelníků.