

1.2.2 Celá čísla

Předpoklady: 1201

Pedagogická poznámka: Nejde o látku na celou hodinu. Druhou polovinu hodiny většinou využíváme na psaní písemek. Další možností je projít některá zdůvodnění pravidla $-\cdot - = +$.

K přirozeným číslům přidáme nulu (nic) a záporná čísla (menší než nula, na číselné ose nalevo od ní).

Jak si představíme záporná čísla?

Dluhy, chybějící prvky, odebrání, návraty, zpětný pohyb, opačná hodnota na stupnici.

Př. 1: Rozhodni, které z vlastností určených u číselných operací (U, K, A, N, $^{-1}$) má operace sčítání v oboru celých čísel.

Sčítání má vlastnosti:

U

K

A

N (0) (přičtení nuly nezmění žádné celé číslo)

$^{-1}$ (ke každému celému číslu je možné najít číslo opačné, takové aby součet byl nula \Rightarrow opačné číslo je inverzním prvkem vzhledem k operaci sčítání)

Je vidět, že vzhledem ke sčítání jsou celá čísla úplně ideální množinou, mají všechny krásné vlastnosti, které mohou mít.

Př. 2: Najdi inverzní prvky vzhledem ke sčítání k číslům 4, 0, -123, $3(-2)$, $4-9$.

Inverzní prvek vzhledem ke sčítání = prvek, který přičteme a vyjde nula tedy opačné číslo.

4 -4

0 0

-123 123

$3(-2) = -6$ 6

$4-9 = -5$ 5

Př. 3: Rozhodni, které z vlastností určených u číselných operací (U, K, A, N, $^{-1}$) má operace odčítání v oboru celých čísel.

Vlastnosti odčítání

U

N (0)

$^{-1}$ (každé celé číslo je vzhledem k odčítání opačné samo k sobě ($2-2=0$, $-3-(-3)=0$)).

Odčítání je, pokud jde o vlastnosti, chudý příbuzný sčítání.

Postřeh:

- $1 - 2 = -1$ stejně jako $1 + (-2) = -1$
- $15 - 7 = 8$ stejně jako $15 + (-7) = 8$

Odčítat je stejné jako přičítat opačné číslo \Rightarrow tímto způsobem můžeme nahradit odčítání 4 přičítáním -4 : $5 - 4 = 5 + (-4)$.

Výhody: Sčítání má K+A (je proto se s ním lépe počítá), zbude méně operací \Rightarrow na VŠ se místo odčítání přičítají opačné prvky.

Př. 4: Rozhodni, které z vlastností určených u číselných operací (U, K, A, N, $^{-1}$) má operace násobení v oboru celých čísel.

Násobení má vlastnosti:

U

K

A

N – jednička značí se N(1)

Nemáme inverzní prvky (pro 2 by to byla $\frac{1}{2}$, ale to není celé číslo).

Př. 5: Rozhodni, které z vlastností určených u číselných operací (U, K, A, N, $^{-1}$) má operace dělení v oboru celých čísel.

Dělení má tyto vlastnosti:

N(1)

Pro libovolná celá čísla a, b, c platí distributivní zákon $a(b+c) = ab+ac$.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je důležitý. Jedním z největších evergreenů středoškolských matematických chyb je mylná představa, že když před něco napíšeme mínus, bude to záporné.

Př. 6: Je dáno celé číslo x . Jaké je znaménko čísla $-x$?

Nejde rozhodnout, protože:

- $x = 3 \Rightarrow -x = -3$ záporné číslo,
- $x = -3 \Rightarrow -x = -(-3) = 3$ kladné číslo.

\Rightarrow Pokud neznáme znaménko čísla x , neznáme ani znaménko čísla $-x$.

Proč platí $5 \cdot (-10) = -50$?

Dlužít pěti lidem po deseti korunách, znamená celkový dluh 50 Kč, tedy majetek -50 Kč.

Proč platí $(-5) \cdot (-10) = 50$?

Existuje několik zdůvodnění.

Prominutí dluhu

Záporná čísla nám umožňují popsat dluhy:

- $400 + (-200) = 200$: dostal jsem 400 Kč a půjčil jsem si 200 Kč \Rightarrow ve skutečnosti jsem získal 200 Kč (zbývajících 200 Kč budu muset vrátit),
- $500 - 100 = 400$: vydělal jsem 500 Kč a 100 Kč jsem utratil \Rightarrow mé úspory se zvýšily o 400 Kč,
- $500 - (-200)$: dostal jsem 500 Kč a někdo mi prominul (odečetl) 200 Kč dluhu \Rightarrow mám o 700 Kč více (prominutí dluhu 200 Kč je ve skutečnosti dar 200 Kč) \Rightarrow $500 - (-200) = 500 + 200 = 700$.

Obracení obrazů na číselné ose

Kde je na ose číslo -2 ?

Stejně daleko od počátku jako číslo 2, ale na opačné straně \Rightarrow znaménko mínus "obráť" pozici obrazu čísla na ose.

Kde leží obraz čísla $-(-2)$?

Stejně daleko od počátku jako obraz čísla -2 , ale na opačné straně \Rightarrow obrazy čísel $-(-2)$ a 2 splývají \Rightarrow platí $-(-2) = 2$.

-2 můžeme přepsat pomocí násobení $-2 = (-1) \cdot 2 \Rightarrow -(-2) = (-1) \cdot (-2) = (-1) \cdot (-1) \cdot 2 = 2 \Rightarrow (-1) \cdot (-1) = 1$.

Směřování násobení

Vytváříme součiny a píšeme si jejich výsledky:

$$5 \cdot (-10) = -50 \quad 3 \cdot (-10) = -30 \quad 1 \cdot (-10) = -10 \quad 0 \cdot (-10) = 0$$

Vidíme, že se zmenšující se hodnotou levé strany součinu, se zvětšuje výsledek \Rightarrow logicky by mělo platit: $(-1) \cdot (-10) = 10$ $(-3) \cdot (-10) = 30$ $(-5) \cdot (-10) = 50$

Výletník na číselné ose

Výletník se postaví do počátku a vydá se na výlet. Vzdálenost, kterou urazí, určíme jako součin dvou údajů: rychlosti pohybu a doby pohybu.

Při pohybu rychlostí 5 km/h po dobu 3 hodin urazí $5 \cdot 3 \text{ km} = 15 \text{ km}$.

Co znamená, že se výletník pohybuje rychlostí -5 km/h ? Zřejmě jde na opačnou stranu (doleva do záporných čísel) \Rightarrow rychlostí -5 po dobu 3 hodin urazí $(-5) \cdot 3 \text{ km} = -15 \text{ km}$,

Má kromě záporné rychlosti smysl i záporný čas?

Výletník jde rychlostí 5 km/h (tedy doprava) už dlouho a nyní je v počátku (v nule). Kde byl před hodinou (v čase -1 hodina)? V bodě $-5 \Rightarrow$ smysl má i součin $5 \cdot (-3) \text{ km} = -15 \text{ km}$

(pokud je v tomto okamžiku výletník v počátku a už tři hodiny jde doprava rychlostí 5 km/h byl před třemi hodinami v bodě $5 \cdot (-3) \text{ km} = -15 \text{ km}$ (tedy nalevo od osy).

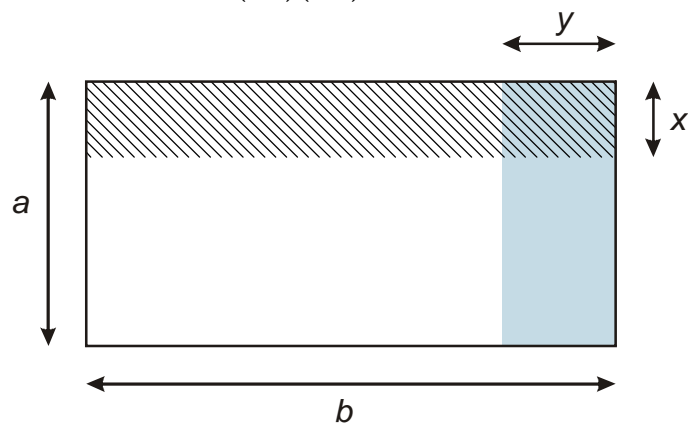
Co znamená součin $(-5) \cdot (-3)$? Výletník je v počátku a jde rychlostí 5 km/h doleva. Kde byl před třemi hodinami? V bodě 15 km $\Rightarrow (-5) \cdot (-3) \text{ km} = 15 \text{ km} \Rightarrow$ součinem dvou záporných čísel je číslo kladné.

Odečítání ploch

Máme obdélník o stranách a , b . Z obou stran odečteme délky x , $y \Rightarrow$ strany mají délky $a - x$ a $b - y$.

Jaký je jeho obsah? $S = (a - x)(b - y) = [a + (-x)][b + (-y)] = ab - ay - bx + (-x)(-y)$

Význam součinu $(-x)(-y)$ určíme z obrázku.



Plocha celého obdélníku ab .

Bílá plocha = $ab - ay - bx + xy$ (obdélník o stranách x, y jsme odečítali v obdélníku ay i obdélníku bx , tedy dvakrát \Rightarrow musíme ho ještě jednou přičíst \Rightarrow platí $(-x)(-y) = xy$).

Shrnutí: V množině celých čísel můžeme nahradit odčítání přičítáním opačného čísla.