## 1.2.3 Racionální čísla I

**Předpoklady:** 010202

**Pedagogická poznámka:** Hodina je trochu netypická, na jejím začátku provedu výklad (spíše opakování), který nechám na tabuli a potom až do konce řeší žáci zbytek hodiny od příkladu 3 dál. Psaní poznámek během výkladu je věcí studentů, připomínám jen, aby během řešení příkladů, registrovali na kolik jim vystačí vlastností poznámky a jak často se musí koukat na tabuli.

**Racionální jsou všechna čísla, která můžeme zapsat ve tvaru zlomku $\frac{p}{q}$, kde $p \in Z$, $q \in N$.**

- například $\frac{2}{1}$ ; $\frac{3}{15}$ ; $\frac{3}{2}$ ; $-\frac{6}{4}$ ; …,
- umožňují počítat s částmi celků (třeba polovina dortu),
- umožňují dělit $\Rightarrow$ $\frac{2}{3}$ je číslo vzniklé dělením $2:3$.

**Proč nejde dělit nulou** (vtloukají nám to do hlavy od třetí třídy)?
Počítáme $6:3$ $\Rightarrow$ hledáme takové číslo, které po vynásobení 3 dá 6 (nebo jinak $6:3=2$, protože $2\cdot 3=6$, správnost výsledku při dělení se vždycky dá ověřit pomocí násobení).

**Př. 1:** Jaké číslo hledáme, když se snažíme spočítat $6:0$?

Číslo, které po vynásobení 0 dá 6.

Takové číslo, ale neexistuje, protože všechna čísla po vynásobení 0 dají 0, žádné z nich nedá 6 $\Rightarrow$ **nulou nelze dělit, protože nemáme k dispozici žádná čísla, která by mohla být výsledky této operace.**

**Pedagogická poznámka:** Ještě jsem snad nepotkal žáka, který by věděl, proč se nesmí dělit nulou. Přitom nejde o nic těžkého. Popsat, jaké číslo hledají při operaci $6:3$, dokáží všichni. Při popisu výsledku operace $6:0$ musí žáci překonat blok „neexistuje“, ale jakmile zformulují větu z řešení příkladu 1, skoro všichni sami pochopí, proč nulou dělit nejde.

**Dodatek:** Nemožnost dělení nulou se dá snadno ukázat i na modelu dělení – rozdělování nějakého množství na stejné hromádky. Příklad $6:0$ by znamenal rozdělení šesti věcí na 0 hromádek, což uskutečnit nejde, vždy potřebujeme alespoň nějaké místo, na které budeme rozdávat.

**Př. 2:** Rozhodni, které z vlastností určovaných u číselných operací (U, K, A, N, $^{-1}$) mají operace sčítání, odčítání, násobení a dělení v oboru racionálních čísel. K jakým změnám oproti celým číslům došlo?

Sčítání: U, K, A, N(0), $^{-1}$.
Odčítání: U, N(0), $^{-1}$.
Násobení: U, K, A, N(1), $^{-1}$ - kromě nuly.
Dělení: U, N(1), $^{-1}$ - kromě nuly.

Pro racionální čísla (mimo nuly) existují inverzní čísla (pro 2 je to číslo $\frac{1}{2}$) . Operace dělení je uzavřená (pokud nedělíme nulou) $\Rightarrow$ přidáním dalších čísel jsme u nové množiny získali více vlastností.
Čísla inverzní vzhledem k operaci násobení se nazývají **převrácená čísla** (převrácené hodnoty).

**Poznámka:** Racionální čísla jsou tak trochu podvod. Ve zlomku $\frac{2}{3}$ je stále ukryto dělení $2:3$, tento zlomek je tedy výsledkem dělení a když si ho chceme představit, tak opět pomocí dělení. Nic moc nového jsme se tedy nenaučili, spíše jsme výsledek dělení představili jako nové číslo.

**Postřeh:** $2:3=\frac{2}{3}$ $\quad 2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ Dělit číslem je stejné jako násobit jeho převrácenou hodnotou $\Rightarrow$ tímto způsobem můžeme nahradit dělení násobením (jako jsme odčítání nahradili přičítáním opačného čísla).
**Výhody:** násobení má K+A, zbude méně operací $\Rightarrow$ ve vysokoškolské matematice se nedělí.
Že jde o to samé, si můžeme představit na dortu: Část, kterou získáme při rozdělení na tři stejné kusy (dělení třemi), je jedna třetina (vynásobení dortu jednou třetinou).

Jedno racionální číslo je možné zapsat různými způsoby $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}=...=\frac{36}{54}=...$ $\Rightarrow$ všechny jsou matematicky rovnocenné, ale nejsou stejně jednoduché. $\Rightarrow$
**Základní tvar**: Racionální číslo je zapsáno v základním tvaru, když čísla *p* a *q* nemají žádného společného dělitele kromě 1.

Jak jinak vyjádřit racionální číslo?
**a) desetinným číslem**
Například: $\frac{9}{10}=0,9$ nebo $\frac{9}{250}=\frac{4\cdot 9}{4\cdot 250}=\frac{36}{1000}=0,036$.

Tvar desetinného čísla můžeme získat i dělením.
$9:250=0,036$
90
900
1500
0

Desetinným rozvojem nejde zapsat každé racionální číslo.

Například $\frac{10}{33}=\frac{10}{3\cdot 11}$ ve jmenovateli je součin 3 a 11, nemůžeme zlomek rozšířit tak, aby ve jmenovateli byla mocnina 10.

Jak zapsat racionální číslo, když nejde napsat jako desetinné číslo?

**b) nekonečným periodickým desetinným rozvojem s vyznačenou periodou**

Zkusíme zapsat číslo $\frac{9}{11}$, desetinná místa se pokusíme najít dělením.

$9:11=0,8181...$

90

20

90

20

......

Opakují se zbytky $\Rightarrow$ opakují se i čísla ve výsledku.

$\frac{9}{11}=0,\overline{81}$ - **ryze periodický rozvoj**, perioda je 81

Zkusíme najít rozvoj pro číslo $\frac{11}{12}$:

$11:12=0,9166...$

110

20

80

80

....

$\frac{11}{12}=0,91\overline{6}$ - **neryze periodický rozvoj**, perioda 6, předperioda 91

**c) smíšeným číslem**

Má význam pouze pro čísla větší než 1.

$2\frac{1}{3}=2+\frac{1}{3}$

**Dodatek:** Kladné zlomky menší než 1 se často označují jako pravé, kladné zlomky větší než jedna jako nepravé.

**Př. 3:** Najdi převrácená čísla k číslům $3; -\frac{1}{12}; \frac{5}{16}, \frac{27}{4}$.

| | | |
|---|---|---|
| $3$ | $\frac{1}{3}$ | $3\cdot\frac{1}{3}=1$ |
| $-\frac{1}{12}$ | $-12$ | $-\frac{1}{12}\cdot(-12)=1$ |

$\frac{5}{16}$ $\frac{16}{5}$ $\frac{5}{16}\cdot\frac{16}{5}=1$

$\frac{27}{4}$ $\frac{4}{27}$ $\frac{27}{4}\cdot\frac{4}{27}=1$

**Př. 4:** Kolik různých racionálních čísel je napsáno zlomky $\frac{2}{3};\frac{6}{9};\frac{36}{54}$?

Některé zlomky můžeme krátit.

$\frac{6}{9}=\frac{3\cdot 2}{3\cdot 3}=\frac{2}{3}$ $\frac{36}{54}=\frac{6\cdot 6}{6\cdot 9}=\frac{2\cdot 3}{3\cdot 3}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow$ zlomky $\frac{2}{3};\frac{6}{9};\frac{36}{54}$ představují jedno racionální číslo.

**Př. 5:** Najdi základní tvar racionálních čísel.

a) $\frac{12}{8}$ b) $\frac{21}{35}$ c) $\frac{60}{48}$ d) $\frac{504}{756}$

a) $\frac{12}{8}=\frac{4\cdot 3}{4\cdot 2}=\frac{3}{2}$ b) $\frac{21}{35}=\frac{7\cdot 3}{7\cdot 5}=\frac{3}{5}$ c) $\frac{60}{48}=\frac{6\cdot 10}{6\cdot 8}=\frac{2\cdot 5}{2\cdot 4}=\frac{5}{4}$

d) $\frac{504}{756}=\frac{2\cdot 252}{2\cdot 378}=\frac{2\cdot 126}{2\cdot 189}=\frac{3\cdot 42}{3\cdot 63}=\frac{3\cdot 14}{3\cdot 21}=\frac{7\cdot 2}{7\cdot 3}=\frac{2}{3}$

**Pedagogická poznámka:** Krácení zlomků nedělá žákům problémy, příklad je možné přeskočit.

**Př. 6:** Převeď smíšená čísla na zlomek. a) $3\frac{3}{7}$ b) $-2\frac{4}{5}$

a) $3\frac{3}{7}=3+\frac{3}{7}=\frac{21}{7}+\frac{3}{7}=\frac{24}{7}$

b) $-2\frac{4}{5}=-\left(2+\frac{4}{5}\right)=-\left(\frac{10}{5}+\frac{4}{5}\right)=-\frac{14}{5}$

**Př. 7:** Zapiš ve formě desetinného čísla.

a) $\frac{7}{100}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{3}{20}$ d) $\frac{9}{250}$

Potřebujeme ve jmenovateli mocninu deseti.

a) $\frac{7}{100}=0,07$ b) $\frac{3}{5}=\frac{2\cdot 3}{2\cdot 5}=\frac{6}{10}=0,6$

c) $\frac{3}{20}=\frac{5\cdot 3}{5\cdot 20}=\frac{15}{100}=0,15$ d) $\frac{9}{250}=\frac{9}{250}\cdot\frac{4}{4}=\frac{36}{1000}=0,036$

**Př. 8:** Převeď na zlomek v základním tvaru číslo $0,25$.

$$0,25=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$$

**Př. 9:** Převeď na zlomek v základním tvaru číslo $2,375$.

$$2,375=\frac{2375}{1000}=\frac{475}{200}=\frac{95}{40}=\frac{19}{8}$$

**Př. 10:** Převeď zlomky na smíšená čísla. a) $\frac{35}{6}$ b) $-\frac{25}{3}$.

a) Hledáme kolikrát se vejde 6 do 35 (5x) $\Rightarrow$ rozdělíme $35=5\cdot 6+5$

$$\frac{35}{6}=\frac{30}{6}+\frac{5}{6}=5+\frac{5}{6}=5\frac{5}{6}$$

b) Podobně jako u předchozího příkladu.

$$-\frac{25}{3}=-\left(\frac{25}{3}\right)=-\left(\frac{24}{3}+\frac{1}{3}\right)=-\left(8+\frac{1}{3}\right)=-8\frac{1}{3}$$

**Př. 11:** Rozhodni, jakou podmínku musí splňovat racionální číslo ve tvaru zlomku, aby bylo možné jej zapsat jako desetinné číslo.

Racionální číslo je možné zapsat ve tvaru desetinného čísla jen tehdy, když číslo ve jmenovateli můžeme rozložit na součin čísel 2 a 5.

**Př. 12:** (BONUS) Zdůvodni, proč se všechna racionální čísla dají zapsat pomocí nekonečného desetinného rozvoje s periodou nebo jako desetinné číslo. Proč žádné z nich nemá desetinný rozvoj neperiodický.

Když hledáme desetinný rozvoj dělením, můžeme získávat různé zbytky. Každý jmenovatel je konečné číslo $\Rightarrow$ existuje pouze konečný počet zbytků, které můžeme získat $\Rightarrow$ po určité době se začnou opakovat zbytky i čísla, která získáme do desetinného rozvoje.

**Pedagogická poznámka:** Před následujícím příkladem buď smažu nebo zavřu tabuli.

**Př. 13:** Jaké jsou další (kromě zlomku) možnosti zapsání racionálního čísla?

Další možnosti zapsání racionálního čísla:

- desetinné číslo,
- nekonečný periodický desetinný rozvoj s vyznačenou periodou,
- smíšené číslo.

**Pedagogická poznámka:** Příklad testuje, jak jsou žáci schopní vnímat a srovnávat informace v průběhu hodiny. Z diskuse o příkladu by mělo vyplynout, že by v hlavě měla zůstat informace o těchto třech možnostech, podrobnosti pak mohou zůstat pouze v sešitu.

**Shrnutí:** Racionální čísla mají vzhledem k násobení (s výjimkou nuly) hezké vlastnosti stejně jako vzhledem ke sčítání.