1.2.4 Racionální čísla II

Předpoklady: 1203

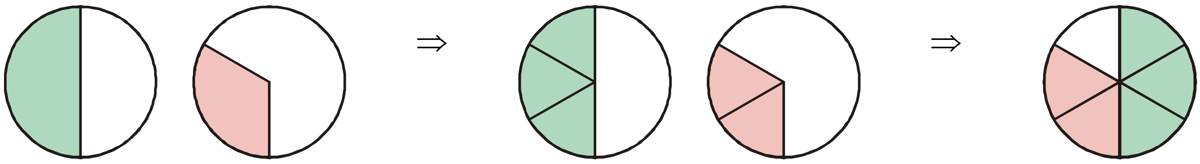
Pedagogická poznámka: S příkladem 10 je třeba začít nejpozději 10 minut před koncem hodiny.

Př. 1: Sečti $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$. Znázorni svůj postup graficky.

$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2+3}{6}=\frac{5}{6}$

Sčítáme nestejné části $\Rightarrow$ musíme je zmenšit tak, aby byly stejné a pak je můžeme sečíst.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3+2}{6}$ $\frac{5}{6}$



Př. 2: Doplň následující pravidla: Pro libovolná dvě racionální čísla $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$ platí:

a) $\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=$ b) $\frac{p}{q}-\frac{r}{s}=$ c) $\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}=$ d) $\frac{p}{q}:\frac{r}{s}=$.

Při sestavování vzorců si můžeme pomoci konkrétním příkladem. Například sečtením dvou konkrétních zlomků.

$\frac{1}{2}+\frac{3}{5}=\frac{1\cdot 5+3\cdot 2}{2\cdot 5} \Rightarrow \frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{ps+rq}{qs}$ (v příkladech, které nám mají odhalit obecné vzorce součiny neroznásobujeme, abychom mohli sledovat pohyb jednotlivých čísel a ve výsledku je snadno nahradili písmeny).

Pro libovolná dvě racionální čísla $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$ platí:

$\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{ps+rq}{qs}$ $\frac{p}{q}-\frac{r}{s}=\frac{ps-rq}{qs}$

$\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}=\frac{pr}{qs}$ $\frac{p}{q}:\frac{r}{s}=\frac{p}{q}\cdot\frac{s}{r}=\frac{ps}{qr}$ $r\neq 0$

Př. 3: Vypočti bez kalkulačky.

a) $\frac{3}{7}+\frac{2}{3}=$ b) $\frac{4}{5}-\frac{5}{9}=$ c) $\frac{14}{9}\cdot\frac{15}{28}=$ d) $\frac{6}{7}:\frac{9}{14}=$

a) $\frac{3}{7}+\frac{2}{3}=\frac{3\cdot 3+2\cdot 7}{7\cdot 3}=\frac{9+14}{21}=\frac{23}{21}$

b) $\frac{4}{5}-\frac{5}{9}=\frac{4\cdot 9-5\cdot 5}{5\cdot 9}=\frac{36-25}{45}=\frac{11}{45}$

c) $\frac{14}{9}\cdot\frac{15}{28}=\frac{2\cdot 7\cdot 3\cdot 5}{3\cdot 3\cdot 4\cdot 7}=\frac{5}{6}$

d) $\frac{6}{7}:\frac{9}{14}=\frac{6}{7}\cdot\frac{14}{9}=\frac{6\cdot 2\cdot 7}{7\cdot 3\cdot 3}=\frac{4}{3}$

Poznámka: Čas, který je potřeba k spočtení zadání c) a d) v předchozím příkladu hodně závisí na způsobu výpočtu. Nejrychlejší je postupovat způsobem naznačeným v řešení – při násobení a dělení rozložit čísla na součinitele a snažit se o maximální zkrácení.
Postup $\frac{14}{9}\cdot\frac{15}{28}=\frac{210}{252}=\frac{105}{126}=\frac{15}{18}=\frac{5}{6}$, při kterém nejdříve čísla vynásobíme a pak zlomek krátíme, je sice také možný, ale nesrovnatelně pomalejší a s daleko větší pravděpodobností chyby.

Pedagogická poznámka: Předchozí poznámku je nutné se studenty probrat. Vždycky se najdou tací, kteří nejdřív násobí a pak krátí. Zejména bez kalkulačky je to velmi riskantní.

Složené zlomky

Př. 4: Najdi vztah pro zjednodušení složeného zlomku $\frac{\frac{p}{q}}{\frac{r}{s}}$.

$\frac{\frac{p}{q}}{\frac{r}{s}}$ představuje podíl dvou zlomků (čísel) $\frac{p}{q}:\frac{r}{s}$ $\Rightarrow$ $\frac{\frac{p}{q}}{\frac{r}{s}}=\frac{p}{q}:\frac{r}{s}=\frac{p}{q}\cdot\frac{s}{r}$.

Př. 5: Jak se změní hodnota zlomku $\frac{p}{q}$, když zvětšujeme číslo p? Jak hodnotu zlomku ovlivňuje zvětšování čísla q?

Zlomek $\frac{p}{q}$ představuje dělení $p:q$ $\Rightarrow$

- když zvětšujeme číslo p, velikost zlomku se zvětšuje (zvětšujeme číslo, které dělíme),
- když zvětšujeme číslo q, velikost zlomku se zmenšuje (zvětšujeme číslo, kterým dělíme),

$\Rightarrow$ zvětšování p zvětšuje velikost zlomku, zvětšování q velikost zlomku zmenšuje.

Př. 6: Vzorec pro zjednodušení složeného zlomku je možné odůvodnit, podobným způsobem, jakým jsme argumentovali v předchozím příkladu („číslo p zvětšuje

hodnotu zlomku (zvětšuje číslo, které dělíme) $\Rightarrow$ při odstranění ho píšeme…“).
Odůvodni tímto způsobem postavení každého z čísel p, q, r, s v upraveném zlomku.

Získaný vzorec můžeme snadno odůvodnit:

- číslo p zvětšuje hodnotu zlomku (zvětšuje číslo, které dělíme) $\Rightarrow$ při odstranění ho píšeme do čitatele,
- číslo q zmenšuje hodnotu zlomku (zmenšuje číslo, které dělíme) $\Rightarrow$ při odstranění ho píšeme do jmenovatele,
- číslo r zmenšuje hodnotu zlomku (zvětšuje číslo, kterým dělíme) $\Rightarrow$ při odstranění ho píšeme do jmenovatele,
- číslo s zvětšuje hodnotu zlomku (zmenšuje číslo, které dělíme) $\Rightarrow$ při odstranění ho píšeme do čitatele,

$$\Rightarrow \frac{\frac{p}{q}}{\frac{r}{s}} = \frac{ps}{qr}.$$

Př. 7: Odstraň složené zlomky.

a) $\frac{\frac{6}{5}}{\frac{3}{10}}$ b) $\frac{\frac{9}{7}}{3}$ c) $\frac{4}{\frac{2}{3}}$ d) $\frac{\frac{1}{3600}}{\frac{1}{1000}}$ e) $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{5}{12}}$

a) $\frac{\frac{6}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{6 \cdot 10}{5 \cdot 3} = 4$ b) $\frac{\frac{9}{7}}{3} = \frac{9}{7 \cdot 3} = \frac{3}{7}$ c) $\frac{4}{\frac{2}{3}} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$

d) $\frac{\frac{1}{3600}}{\frac{1}{1000}} = \frac{1000}{3600} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$ e) $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{5}{12}} = \frac{\frac{3+2}{6}}{\frac{5}{12}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{12}} = \frac{5 \cdot 12}{6 \cdot 5} = 2$

Porovnávání racionálních čísel

Př. 8: Zdůvodni pravidlo pro porovnání dvou zlomků: „Zlomek $\frac{p}{q}$ je větší než zlomek $\frac{r}{s}$, právě když $ps > rq$. Využij pravidlo pro porovnání zlomků $\frac{10}{13}$ a $\frac{18}{23}$.

Chceme porovnat $\frac{10}{13}$ a $\frac{18}{23}$.
Na první pohled řešení nevidíme $\Rightarrow$ převedeme na stejného jmenovatele, nebudeme roznásobovat: $\frac{10}{13} = \frac{10}{13} \cdot \frac{23}{23}$ $\frac{18}{23} = \frac{18}{23} \cdot \frac{13}{13}$
Záleží jen na součinech v čitatelích, jmenovatele jsou stejné.
$10 \cdot 23 = 230$ $18 \cdot 13 = 234$

$\Rightarrow 10\cdot 23 < 18\cdot 13 \Rightarrow \frac{10}{13} < \frac{18}{23}$.

Obecně: Porovnáváme zlomky $\frac{p}{q}$ a $\frac{r}{s}$ $\Rightarrow$ převedeme na společného jmenovatele $\frac{ps}{qs}$ a $\frac{rq}{qs}$

$\Rightarrow$ porovnáváme čitatele rozšířených zlomků *ps* a *rq*.

Pedagogická poznámka: Je zajímavé sledovat, kdo si spočítá součin ve jmenovateli, který pro rozhodnutí o výsledku není vůbec potřeba.

Pamatovat si předchozí pravidlo je spíše nesmyslné. Je velká pravděpodobnost, že se spletete. Lepší je zapamatovat si postup, který k němu vedl.

Př. 9: Jakým způsobem je možné porovnávat více než dvě racionální čísla? V čem jsou nevýhody jednotlivých možností?

Porovnáváme více čísel $\Rightarrow$

- vše převedeme na desetinná čísla (jedno z málo dobrých využití desetinných čísel, která jsou jinak v matematice spíše neužitečná),
  výhoda: jasný a přehledný výsledek,
  nevýhoda: musíme dělit,
- vše na stejný jmenovatel,
  výhoda: pouze násobíme,
  nevýhoda: u většího počtu čísel složité hledání společného dělitele,
- porovnávat dvojice mezi sebou (pozor na to, která porovnání jsou nutná a která kvůli výsledkům předchozích porovnávání už zbytečná)
  výhoda: jednodušší porovnávání dvou čísel než více čísel najednou,
  nevýhoda: nutné udržení přehledu o tom, které dvojice ještě musíme porovnat.

Př. 10: Uspořádejte vzestupně čísla: $\frac{1}{3}$; $\frac{11}{32}$; 0,34. Pokud máš dostatek času, vyzkoušej více metod z předchozího přehledu.

a) převedení na desetinná čísla

$\frac{1}{3} = 0{,}3333$ $\quad \frac{11}{32} = 0{,}34375$ $\quad \Rightarrow$ platí: $\frac{1}{3} < 0{,}34 < \frac{11}{32}$.

b) převedení na stejného jmenovatele

$0{,}34 = \frac{34}{100} = \frac{17}{50}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{11}{32}$

$50 = 2\cdot 5\cdot 5$, $32 = 4\cdot 8 = 2^5$ $\Rightarrow$ společný jmenovatel $2^5\cdot 3\cdot 5^2$

$$\frac{1}{3} = \frac{2^5\cdot 5^2}{3\cdot 2^5\cdot 5^2} = \frac{8\cdot 100}{3\cdot 2^5\cdot 5^2} = \frac{800}{3\cdot 2^5\cdot 5^2}$$

$$\frac{11}{32} = \frac{11\cdot 3\cdot 5^2}{2^5\cdot 3\cdot 5^2} = \frac{11\cdot 75}{3\cdot 2^5\cdot 5^2} = \frac{825}{3\cdot 2^5\cdot 5^2}$$

$$0{,}34 = \frac{17}{50} = \frac{17\cdot 3\cdot 2^4}{2\cdot 5^2\cdot 3\cdot 2^4} = \frac{816}{2^5\cdot 3\cdot 5^2}$$

$\Rightarrow$ platí: $\frac{1}{3} < 0,34 < \frac{11}{32}$.

c) porovnávání dvojic mezi sebou

$\frac{1}{3}$ a $\frac{11}{32}$: $1 \cdot 32 = 32$ a $11 \cdot 3 = 33$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{3} < \frac{11}{32}$.

0,34 a $\frac{1}{3}$: $\frac{1}{3} = 1:3 = 0,333...$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{3} < 0,34$

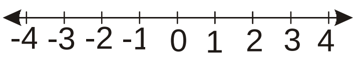
Ještě musíme porovnat poslední dvojici (nevíme, zda je $0,34$ větší nebo menší než $\frac{11}{32}$).

$\frac{11}{32}$=0,34375 $\Rightarrow$ $0,34 < \frac{11}{32}$

Celkově: $\frac{1}{3} < 0,34 < \frac{11}{32}$.

Číselná osa

Přímka s vyznačenou nulou (počátkem) a zvolenou jednotkovou velikostí na znázorňování čísel.
Vzdálenost čísla od počátku se rovná jeho absolutní hodnotě, kladná čísla kreslíme napravo, záporná nalevo.



Každé racionální číslo dokážeme zobrazit na osu.

Na ose existují body, ke kterým nemůžeme přiřadit racionální číslo(například $\sqrt{2}$) $\Rightarrow$ ještě nejsme u konce s číselnými obory.

Př. 11: Vypočti: a) $\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{6}$ b) $\left[\frac{15}{4}\cdot\frac{2}{5}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot 2\right]:\frac{22}{3}$

a)

$$\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{6}=\left(\frac{9-4}{12}\right)\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2+1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

b)

$$\left[\frac{15}{4}\cdot\frac{2}{5}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot 2\right]:\frac{22}{3}=\left[\frac{3}{2}+\left(\frac{3-2}{6}\right)\cdot 2\right]:\frac{22}{3}=\left[\frac{3}{2}+\frac{1}{6}\cdot 2\right]:\frac{22}{3}==\left[\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\right]:\frac{22}{3}=$$

$$=\left[\frac{9+2}{6}\right]:\frac{22}{3}=\frac{11}{6}\cdot\frac{3}{22}=\frac{1}{4}$$

Pedagogická poznámka: Bod b) počítám na tabuli a komentuji strategii úprav.

Př. 12: Vypočti $\left[\frac{4}{12}\cdot\frac{6}{8}-2\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right):\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\right]\cdot\left[\frac{7}{6}\cdot\frac{15}{49}:\frac{10}{21}+\frac{5}{4}\right]=$

$$\left[\frac{4}{12}\cdot\frac{6}{8}-2\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right):\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\right]\cdot\left[\frac{7}{6}\cdot\frac{15}{49}:\frac{10}{21}+\frac{5}{4}\right]=\left[\frac{1}{4}-2\left(\frac{2\cdot 2-1\cdot 3}{3\cdot 2}\right):\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\right]\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{21}{10}+\frac{5}{4}\right]=$$

$$\left[\frac{1}{4}-2\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{5}{4}+\frac{2}{3}\right]\cdot\left[\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\right]=\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{4}+\frac{2}{3}\right]\cdot 2=\left(\frac{3-5+8}{12}\right)\cdot 2=\frac{6}{12}\cdot 2=1$$

Pedagogická poznámka: Oba předchozí příklady jsou přípravou na kapitoly 1.6 – 1.9, ve kterých se studenti učí upravovat výrazy. Zdroje chyb jsou dva (stejně jako budou později) – špatná znalost pravidel (třeba krácení přes plus) a špatné opisování s nedbalou úpravou. Rychlejší žáci spočítají oba, pomalejší jenom první příklad napůl s tabulí.

Shrnutí: Při sčítání zlomků převádíme na společného jmenovatele, abychom sčítali stejně velké díly.