## 1.2.7 Druhá odmocnina

**Předpoklady:** umocňování čísel na druhou

**Pedagogická poznámka:** Přirozenou součástí hodiny by bylo i usměrňování zlomků. Bohužel početní schopnosti žáků klesly tak hluboko, že se k usměrňování nedokáží propočítat. Proto jsem usměrňování přesunul do speciální hodiny za třetí odmocninu.

**Př. 1:** Vypočti bez kalkulačky druhé odmocniny.

a) $\sqrt{4}$ b) $\sqrt{81}$ c) $\sqrt{-9}$ d) $\sqrt{5}$

a) $\sqrt{4}=2$, protože $2^2=4$ b) $\sqrt{81}=9$, protože $9^2=81$

c) $\sqrt{-9}$ neexistuje, protože druhé mocniny reálných čísel jsou kladné.

d) $\sqrt{5}=$ číslo menší než tři a větší než dva, které nedokážeme přesně zapsat jinak než nekonečně dlouhým periodickým rozvojem a bez kalkulačky obtížně .

**Pedagogická poznámka:** Objeví se zřejmě žáci, kteří dokáží spočítat odmocniny z -9, i takoví, kteří naopak napíší, že neexistuje $\sqrt{5}$ (když není kalkulačka).

**Př. 2:** Sestav definici druhé odmocniny *x* z čísla *a*.

**Druhá odmocnina z nezáporného reálného čísla *a* je takové nezáporné číslo *x* pro které platí:** $x^2=a$. **Píšeme:** $x=\sqrt{a}$.

**Pedagogická poznámka:** Na příkladu není třeba ztrácet příliš mnoho času. První nástřely většino bývají dost nepřesné, radím žákům, aby si zkusili podle svého návodu nějakou (například $\sqrt{4}$ vypočítat). Společně pak dojdeme k tomu, že musíme využít to, co jsme si říkali v předchozím příkladu (odmocnina je definována pomocí mocnění). žáci tak sestaví větu, která (až na chybějící slova nezáporná) odpovídá správnému řešení. Pak stačí navést, zda podle jejich definice existuje odmocnina z -9. Jediné, co zbývá prodiskutovat, je pak požadavek na odmocninu jako na nezáporné číslo, kde studentům připomínám výhody jednoznačné definice a důvody, které v matematice vedou na požadavek na jednoznačnost (opět bez toho, abychom mluvili o odmocnině jako o funkci).

Jak se naučit definici?
V žádném případě není dobré k ní přistupovat jako k básničce a učit se ji nazpaměť (bez pochopení se v hlavě rychle pomotá).

- V první fázi musíme pochopit smysl definice. Zkusíme si ji samostatně napsat.
- V druhé fázi se zabýváme významem slov, které jsme zapomněli (například u naší definice oběma výskyty slova nezáporný).

Z definice vyplývá:

- $\sqrt{16}=4$ (protože $4^2=16$),

- $\left(\sqrt{\pi}\right)^2 = \pi$ (protože $\sqrt{\pi}$ je číslo, které po umocnění na druhou dá $\pi$),
- $\sqrt{-9}$ nelze (nejde udělat odmocninu ze záporného čísla),
- $\sqrt{16} \neq -4$ (sice platí $(-4)^2 = 16$, ale odmocnina musí být nezáporná),

Podmínka, že odmocnina je nezáporné číslo, je důležitá. Zajišťuje nám jednoznačnost při určování odmocniny, existuje tak pouze jediné číslo, které může vyjít.

**Př. 3:** Odhadni s přesností na celá čísla velikost následujících odmocnin.
a) $\sqrt{7}$ b) $\sqrt{39}$ c) $\sqrt{\pi}$

a) $2 < \sqrt{7} < 3$, protože $4 = 2^2 < 7 < 9 = 3^2$.
b) $6 < \sqrt{39} < 7$, protože $36 = 6^2 < 39 < 49 = 7^2$.
c) $1 < \sqrt{\pi} < 2$, protože $1 = 1^2 < \pi < 4 = 2^2$.

**Pozor:**

| | | |
|---|---|---|
| $\sqrt{16} = 4$<br>jediná hodnota | **X** | $x^2 = 16 \Rightarrow x_1 = 4; x_2 = -4$<br>dvě hodnoty |
| | **Proč?** | |
| | **ptáme se na různé věci** | |
| Jaké nezáporné číslo umocněné na druhou se rovná 16? | | Která čísla jsou kořeny rovnice $x^2 = 16$? |
| | **a proto dostáváme různé odpovědi** | |

**Pravidla pro počítání s odmocninami**

**Pro všechna nezáporná čísla *a, b* platí:**

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b \neq 0)$ $\sqrt{a+b} \rightarrow$ **nedá se roztrhnout!!!!!!!**

Proč jde roztrhnout odmocninu přes krát a nejde ji roztrhnout přes plus?

$$a \cdot b = \left(\sqrt{a \cdot b}\right)^2 = \left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \cdot b$$

$$a + b = \left(\sqrt{a+b}\right)^2 \neq \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b$$

Můžeme si to ukázat i na konkrétních číslech.

$\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$ $\Rightarrow$ Našli jsme příklad, pro který neplatí pravidlo $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ $\Rightarrow$ víme, že tato rovnost není správná (naplatí obecně).

Pomocí pravidel je možné počítat i odmocniny na první pohled příliš těžké.

$\sqrt{900} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{100} = 3 \cdot 10 = 30$

**Př. 4:** Vypočti zpaměti odmocniny. Které mocniny deseti můžeme odmocňovat zpaměti?

a) $\sqrt{10000}$ b) $\sqrt{0,01}$ c) $\sqrt{0,0001}$

a) $\sqrt{10000}=100$ b) $\sqrt{0,01}=0,1$ c) $\sqrt{0,0001}=0,01$

Odmocňovat můžeme takové mocniny deseti, které mají sudý počet nul (větší než 1) nebo sudý počet desetinných míst (menší než 1). Odmocněním se počet nul (počet desetinných míst) zmenší na polovinu.

**Př. 5:** Vypočti odmocniny (bez kalkulačky).

a) $\sqrt{1600}$ b) $\sqrt{360000}$ c) $\sqrt{0,09}$ d) $\sqrt{0,25}$

e) $\sqrt{0,0081}$ f) $\sqrt{14400}$ g) $\sqrt{324}$ h) $\sqrt{225}$

a) $\sqrt{1600}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{100}=4\cdot 10=40$ b) $\sqrt{360000}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{10000}=6\cdot 100=600$

c) $\sqrt{0,09}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{0,01}=3\cdot 0,1=0,3$ d) $\sqrt{0,25}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{0,01}=5\cdot 0,1=0,5$

e) $\sqrt{0,0081}=\sqrt{0,0001}\cdot\sqrt{81}=0,01\cdot 9=0,09$

f) $\sqrt{14400}=\sqrt{100}\cdot\sqrt{144}=10\cdot 12=120$

g) $\sqrt{324}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{81}=2\cdot 9=18$

h) $\sqrt{225}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{25}=3\cdot 5=15$

Všechna čísla nejdou odmocnit úplně: $\sqrt{12}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ = **částečné odmocnění**.

**Př. 6:** Částečně odmocni (bez kalkulačky).

a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{50}$ d) $\sqrt{32}$ e) $\sqrt{75}$ f) $\sqrt{72}$

a) $\sqrt{8}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ b) $\sqrt{18}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{9}=3\sqrt{2}$ c) $\sqrt{50}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{25}=5\cdot\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

d) $\sqrt{32}=\sqrt{8}\cdot\sqrt{4}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}\cdot 2=4\sqrt{2}$ e) $\sqrt{75}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{25}=5\sqrt{3}$

f) $\sqrt{72}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{18}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}=2\cdot 3\cdot\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

**Poznámka:** Při částečném odmocňování nezáleží na pořadí v jaké číslo na součin rozložíme: $\sqrt{50}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}=5\sqrt{2}$ .

**Pedagogická poznámka:** Způsob používají studenti asi častěji a je třeba ho legitimovat, na druhou stranu se snažím vysvětlit, že mají dělat takové úpravy, které se jim budou v následujícím kroku hodit ("koukat dopředu"), při částečném odmocňování tedy hledat rozklady, které obsahují druhé mocniny.

Někdy je možné zjednodušit součin: $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}=3\cdot 2=6$ .

Je zbytečné čísla strkat pod jednu odmocninu a násobit je mezi sebou $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}=\sqrt{36}=6$ , u složitějších příkladů to zdržuje a zvětšuje pravděpodobnost chyby.

**Př. 7:** Zjednoduš součiny (bez kalkulačky).

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ b) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$ c) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{12}$

d) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}$ e) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt{27}$ f) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{18}\cdot\sqrt{24}$

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{16}=4$

b) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}=3\cdot 2=6$

c) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{12}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

d) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=14\sqrt{3}$

e) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt{27}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{9}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}=5\cdot 3\cdot 3=45$

f) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{18}\cdot\sqrt{24}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{16}\cdot\sqrt{36}=3\cdot 4\cdot 6=72$

**Pedagogická poznámka:** Zajímavý je bod c). Automatické opakovače předchozích postupů vedou celá čísla v předchozích bodech k výsledku 12. Řešíme pak, kde vzali chybějící $\sqrt{2}$, kde je napsáno, že výsledkem musí být celé číslo a zda je cennější znaménko = nebo nějaká podobnost výsledku s předchozím příkladem.

Poslední příklad je často řešen následovně:

$\sqrt{12}\cdot\sqrt{18}\cdot\sqrt{24}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{6}=$

$\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=3\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 2=72$

Odmocnin je ve výrazu tolik, že je snadné některou přehlédnout. Doporučuji upozornit na dodržování zásady KISS (keep it small and stupid), o níž se mluví v hodině 1604.

Jde o podobný problém jako při násobení zlomků v hodině 1205. Průběžně se snažím na takových příkladech upozorňovat na fakt, že nestačí pouze umět pravidla a správně je používat. Je nutné postupovat tak, abychom měli v každém okamžiku kontrolu nad příkladem a výpočet příliš nebobtnal.

Podobně jako součiny můžeme zjednodušovat i podíly: $\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{45}}=\frac{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}$.

**Př. 8:** Zjednoduš podíly (bez kalkulačky).

a) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$ c) $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{75}}$ d) $\frac{\sqrt{33}}{\sqrt{27}}$

a) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{9}=3$ nebo také: $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{18}{2}}=\sqrt{9}=3$

b) $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=\sqrt{4}=2$ nebo také: $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{28}{7}}=\sqrt{4}=2$

c) $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{75}}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{7}}{\sqrt{3}\sqrt{25}}=\frac{\sqrt{7}}{5}$ nebo také: $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{75}}=\sqrt{\frac{21}{75}}=\sqrt{\frac{7}{25}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{25}}=\frac{\sqrt{7}}{5}$

d) $\frac{\sqrt{33}}{\sqrt{27}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{11}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{11}}{3}$ nebo také: $\frac{\sqrt{33}}{\sqrt{27}}=\sqrt{\frac{33}{27}}=\sqrt{\frac{11}{9}}=\frac{\sqrt{11}}{3}$

**Shrnutí:** Odmocnina z *a* je kladné číslo, které se po umocnění druhou rovná *a* $\Rightarrow$ souvisí s umocňováním a chová se podobně.