1.2.8 Třetí odmocnina

Předpoklady: 010207

Pedagogická poznámka: Hlavním cílem hodiny je probrání třetí odmocniny jako analogie druhé odmocniny. Říkám žákům, že pokud zpracovali předchozí hodinu správně, neměla by jim tato hodina působit žádné problémy (a měli by všechno vyřešit sami). Při řešení problémů vždy srovnáváme s druhou odmocninou a řešíme, zda je situace stejná nebo odlišná kvůli vyšší mocnině.

Pedagogická poznámka: Rychlejší část třídy pouštím hned od prvního příkladu, kontroluji u nich pouze příklad 4, bod c) v příkladu 5 a bod a) v příkladu 7. Pokud se častěji objevuje problém s hádáním odmocniny v příkladu 5 a násobením do velkých čísel v příkladu 7, spočtu s předstihem na tabuli ukázkové příklady a označím je číslem, aby pomalejší žáci neřešili, co znamenají, a začali se jimi zabývat až ve chvíli, kdy k nim dorazí.

$\sqrt[3]{27}=3$, protože $3^3=27$ (podobně jako u druhé mocniny).

Př. 1: Definuj třetí odmocninu z nezáporného čísla *a*.

Třetí odmocnina z nezáporného čísla *a*, je takové nezáporné číslo *x*, pro které platí: $x^3=a$. Píšeme: $x=\sqrt[3]{a}$.

Všechno podobné jako u druhé odmocniny.

Pedagogická poznámka: Po chvilce bezradným poradím, že mohou použít definici druhé odmocniny.

Dodatek: Na rozdíl od druhé odmocniny je možné zavést třetí odmocninu i pro záporná čísla (protože třetí mocnina záporných čísel je záporná). Na střední škole však rozhodně takové zavedení nemá velký význam.

Př. 2: Urči následující třetí odmocniny. Pokud nejde hodnotu určit přesně, odhadni její velikost s přesností na celá čísla.

a) $\sqrt[3]{8}$ b) $\sqrt[3]{64}$ c) $\sqrt[3]{20}$ d) $\sqrt[3]{100}$

a) $\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$

b) $\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$

c) $2<\sqrt[3]{20}<3$, protože $2^3=8<20<27=3^3$

d) $4<\sqrt[3]{100}<5$, protože $4^3=64<100<125=5^3$

Př. 3: Vypočti zpaměti odmocniny. Které mocniny deseti můžeme odmocňovat zpaměti?
a) $\sqrt[3]{1000}$ b) $\sqrt[3]{0,001}$ c) $\sqrt[3]{0,000001}$

a) $\sqrt[3]{1000}=10$ b) $\sqrt[3]{0,001}=0,1$ c) $\sqrt[3]{0,000001}=0,01$
Odmocňovat třetí odmocninou můžeme snadno takové mocniny deseti, které mají počet nul (mocniny větší než 1) nebo počet desetinných míst (mocniny menší než 1) dělitelný třemi. Odmocněním se počet nul (počet desetinných míst) zmenší na třetinu.

Př. 4: Doplň pravidla pro počítání s odmocninami.
$\sqrt[3]{ab}=$ $a\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{}$ $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=$ $\sqrt[3]{a+b}=$

Pravidla pro počítání s odmocninami (analogická s pravidly pro druhé odmocniny)

$\sqrt[3]{ab}=\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}$ $a\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a^3b}$

$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ **(** $b\neq 0$ **)** $\sqrt[3]{a+b}\rightarrow$ **<u>nedá se roztrhnout!!!!!!!</u>**

Pedagogická poznámka: Je zajímavé sledovat zejména druhé (zda se pod odmocninou neobjeví a^2) a čtvrté pravidlo (rozdělení odmocniny přes plus).

Pravidla můžeme použít pro výpočet těžších odmocnin.

$$\sqrt[3]{512}=\sqrt[3]{4\cdot128}=\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2\cdot64}=\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{8\cdot8}=2\cdot\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{8}=2\cdot2\cdot2=8$$

Př. 5: Vypočti bez použití kalkulačky následující odmocniny.
a) $\sqrt[3]{8000}$ b) $\sqrt[3]{0,064}$ c) $\sqrt[3]{216}$ d) $\sqrt[3]{729}$ e) $\sqrt[3]{3375}$.

a) $\sqrt[3]{8000}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{1000}=2\cdot10=20$
b) $\sqrt[3]{0,064}=\sqrt[3]{64}\cdot\sqrt[3]{0,001}=4\cdot0,1=0,4$
c) $\sqrt[3]{216}=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{108}=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{27}=2\cdot3=6$
d) $\sqrt[3]{729}=\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{243}=\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{27}=3\cdot3=9$
e) $\sqrt[3]{3375}=\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{675}=\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{135}=\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{27}=5\cdot3=15$

Pedagogická poznámka: Někteří žáci mají problémy, protože si neuvědomí, že $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}=\left(\sqrt[3]{2}\right)^3=2$.

Pedagogická poznámka: Než začnou žáci počítat předchozí příklad, zakazuji pokusné násobení čísel na třetí, kterým se snaží najít správné výsledky. Tento postup vede k výsledkům pouze u předem připravených příkladů.

Pedagogická poznámka: Výpočet posledních tří odmocnin je bez kalkulačky zdlouhavý a obtížný, na druhou stranu vyžaduje postupné úpravy a cílevědomou práci. Navíc není na počátku příliš zřejmé, jak řešení dopadne a je zkrátka potřeba nějak začít. Což je právě to, co žáci příliš nedělají. Jakmile nevidí celé řešení, radši nezačnou. Proto je třeba začátek bodu c) spočítat na tabuli. Nečekáme, až všichni vypočítají všechny body, aby se dal stihnout i zbytek hodiny.

Stejně jako u druhých odmocnin mnohdy můžeme provést pouze částečné odmocňování.

Př. 6: Částečně odmocni. a) $\sqrt[3]{24}$ b) $\sqrt[3]{32}$ c) $\sqrt[3]{54}$ d) $\sqrt[3]{320}$

a) $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{8} = 2\sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4}$

c) $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$

d) $\sqrt[3]{320} = \sqrt[3]{5 \cdot 64} = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{8} = 4\sqrt[3]{5}$

Můžeme upravovat součiny nebo podíly. Snažíme se pracovat s co nejmenšími čísly.
$\sqrt[3]{75} \cdot \sqrt[3]{45} = \sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3} = 5 \cdot 3 = 15$

Př. 7: Zjednoduš součiny.
a) $\sqrt[3]{18} \cdot \sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{6}$ b) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{16}$ c) $\sqrt[3]{18} \cdot \sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{15}$

a) $\sqrt[3]{18} \cdot \sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$

b) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{8} = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$

c) $\sqrt[3]{18} \cdot \sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{15} = \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} = 3 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot 5 = 15\sqrt[3]{2}$

Př. 8: Zjednoduš podíly.
a) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{54}}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{135}}$ c) $\dfrac{\sqrt[3]{50} \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{15} \cdot \sqrt[3]{20}}$

a) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{54}} = \dfrac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{27}} = \dfrac{2}{3}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{135}} = \dfrac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{5}} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{3}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{50} \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{15} \cdot \sqrt[3]{20}} = \dfrac{\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{4}} = \dfrac{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5}} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$

Shrnutí: Třetí odmocnina je analogií druhé odmocniny.