

1.2.9 Usměrnění zlomků

Předpoklady: 010208

Pedagogická poznámka: Celá hodina by měla být naplněná jedinou myšlenkou. Při usměrnění rozšiřujeme zlomek tím, co potřebujeme. Fakt, že si příklad upravíme, jak potřebujeme, je pro část žáků poměrně těžko přijatelný, protože chápou matematiku jako oblast železných pravidel (kterým nerozumí), která jim berou jakoukoliv svobodu.

Usměrnění zlomku

Úprava zlomku vedoucí k odstranění odmocniny ze jmenovatele.

Historicko-estetické důvody: V předkalkulačkové době bylo těžké určit hodnotu zlomku, když byla ve jmenovateli (kterým dělíme) odmocnina s nekonečným rozvojem (ono se špatně dělí už tříciferným číslem natož číslem, které má cifer nekonečně mnoho).

Máme zlomek $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Potřebujeme vynásobit jmenovatel $\sqrt{2}$: $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ **nejde**, změníme zlomek na jiné číslo, násobit můžeme pouze jedničkou (ta ho nezmění) \Rightarrow zkusíme vynásobit zlomek $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (přesně to jsme potřebovali).

Zkusíme si představit hodnoty původního a upraveného zlomku $\sqrt{2} \doteq 1,41$:

- $\frac{1}{\sqrt{2}} \doteq \frac{1}{1,41} = ?$,
- $\frac{\sqrt{2}}{2} \doteq \frac{1,41}{2} = 0,705$,

\Rightarrow v upraveném stavu je to rozhodně jednodušší.

Př. 1: Usměrní zlomky (bez kalkulačky).

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

b) $\frac{5}{\sqrt{5}}$

c) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$

d) $\frac{9}{\sqrt{18}}$

a) $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$

c) $\frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{9}} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ - rozšiřujeme jen $\sqrt{3}$, 2 ve jmenovateli nevádí.

d) $\frac{9}{\sqrt{18}} = \frac{9}{\sqrt{9 \cdot 2}} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ - nejdřív zlomek zjednodušíme a pak teprve rozšiřujeme.

Pedagogická poznámka: Bod a) spočítají všichni, už v b) ale mají někteří problémy s 5 v čitateli, v c) se zbytečně rozšiřuje i 2.

Podobně postupujeme i u třetí odmocniny.

Př. 2: Usměrní zlomky.

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

d) $\frac{1}{\sqrt[3]{18}}$

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{2})^3} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ - k třetí odmocnině musíme přidat dvakrát $\sqrt[3]{2}$,

abychom získali $(\sqrt[3]{2})^3$.

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3}}{(\sqrt[3]{3})^3} = \frac{\sqrt[3]{9}}{3}$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$

d) $\frac{1}{\sqrt[3]{18}} = \frac{1}{\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{4}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{4}}{6}$

Pedagogická poznámka: Studenti by se měli pokusit o objevení postupu usměrňování sami. Právě způsob, jakým se o to pokoušejí, hodně napoví o tom, jak vůbec vnímají pravidla, o kterých se učí. Jestli je chápou i s jejich smyslem nebo je naopak berou jako mechanické, jednoúčelové záležitosti.

Těm, kteří řeší první příklad takto: $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$, připomenu, aby si číslo

ve jmenovateli opravdu spočítali (většinou ho nepočítají, pouze předpokládají, že když potřebují ve výsledku 2, tak tam i vyjde). Když provedou správnou úpravu:

$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}}$ sami rychle poznají, co mají do rozšiřovacího zlomku přidat.

V bodech c) a hlavně d) jde zejména o to, aby zbytečně nerozšiřovali zlomky příliš velkými čísly.

Pedagogická poznámka: V bodech c) a d) (a ještě více v následujícím příkladu) část žáků ztroskotá na tom, že nedokáže udržet výpočet přehledný a bez chyb v opisování. Je třeba jim vysvětlit, kde se jejich problémy berou.

Můžeme usměrnit i složitější zlomky, třeba $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

Zkusíme klasiku: $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \Rightarrow$ odmocnina nezmizela.

$$\text{Další pokus: } \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}-1)^2} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}^2 - 2\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-2\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{3-2\sqrt{2}},$$

odmocnina stále žije a zlomek je daleko složitější než na začátku.

V čem je problém?

Jmenovatel jsme umocňovali vzorcem $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Naše snaha zkrachovala kvůli

členu $2ab$ ($a = \sqrt{2}$) \Rightarrow hledáme vzorec, který nemá "prostřední" člen \Rightarrow

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b).$$

$$\text{Nový pokus: } \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{1} = \sqrt{2}+1.$$

$$a-b \quad (a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2$$

Pedagogická poznámka: Asi typická je skutečnost, že žáci většinou všechny tři vzorce znají, ale používat je příliš neumí.

Pedagogická poznámka: Moc bych se přimlouval, aby žáci dostali možnost zkusit usměrnění

zlomku $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ a společně nalézt správné řešení. Jde i o nácvik obecné schopnosti

řešit problémy:

1. pokus
2. hledání zádrhele
3. odstranění zádrhele

Př. 3: Usměrní zlomky:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{5}}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

$$\text{a) } \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{9}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$(a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2$$

$$\text{b) } \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2 - 1} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{1} = \sqrt{2}-1$$

$$\text{c) } \frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{1-5} = -\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{d) } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4}-\sqrt{6}}{\sqrt{4}-\sqrt{9}} = \frac{2-\sqrt{6}}{2-3} = \frac{2-\sqrt{6}}{-1} = \sqrt{6}-2$$

Pedagogická poznámka: Úspěch v bodě b) závisí na tom, jak žáci převzali vysvětlování.

Pokud si pamatují, že mají napsat za odmocninu +, bod b) nevyřeší. Pokud si pamatují, že mají dokončit vzorec $(a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2$ je šance na úspěch docela vysoká.

Př. 4: (BONUS) Usměrní zlomek $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

Odmocniny nejde odstranit najednou, zkusíme to postupně, $1+\sqrt{2}$ budeme brát jako jedno číslo.

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{1}{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}} \cdot \frac{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}}{1+2\sqrt{2}+2-3} =$$
$$\frac{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+2+\sqrt{6}}{2\cdot 2} = \frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

Pedagogická poznámka: Uvedený postup není samozřejmě jediný, další možnosti jsou

$$\frac{1}{1+(\sqrt{2}-\sqrt{3})} \text{ nebo } \frac{1}{(1-\sqrt{3})+\sqrt{2}}.$$

Př. 5: (BONUS, bez kalkulačky) Hodnotu $\sqrt{2}$ lze určit na libovolný počet desetinných míst například tímto postupem.

Víme, že $\sqrt{2}$ je takové číslo, pro něž platí, že $(\sqrt{2})^2 = 2$. Dále víme, že $1^2 = 1$ a

$2^2 = 4$. Protože $1^2 = 1 < 2 < 4 = 2^2$ musí být $1 < \sqrt{2} < 2$. Zjistili jsme tedy, že hodnota $\sqrt{2}$ leží mezi čísly 1 a 2.

Náš odhad můžeme dále zlepšovat. Po výpočtu druhých mocnin čísel 1.1; 1.2 až 1.9 zjistíme, že $1.4^2 = 1.96$ a $1.5^2 = 2.25$. Stejně jako v předchozím případě platí $1.4^2 = 1.96 < 2 < 2.25 = 1.5^2$ a proto $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$. Tím se nám podařilo zpřesnit odhad o jeden řád. Tímto způsobem můžeme postupovat libovolně dlouho a získat tak libovolně přesný odhad $\sqrt{2}$.

Urči hodnotu $\sqrt{7}$ zaokrouhlenou na dvě desetinná místa. Navrhni taková vylepšení uvedeného postupu, aby bylo možné bez snížení přesnosti, nalézt požadovaný výsledek rychleji.

Správná hodnota $\sqrt{7}$ zaokrouhlená na dvě desetinná místa je $\sqrt{7} \doteq 2.65$. Správnou hodnotu můžeme určit z nerovnosti: $2.645 < \sqrt{7} < 2.646$.

Některá zlepšení postupu:

1. **Zastavení iterace** - Ve chvíli, kdy najdeme číslo jehož druhá mocnina je větší než 7, zastavíme umocňování dalších čísel. (Například při výpočtu nerovnosti $2.6 < \sqrt{7} < 2.7$ nemá cenu zjišťovat druhou mocninu čísel 2.8 a 2.9).

2. **Půlení intervalů** - Máme zpřesňovat nerovnost $2.6 < \sqrt{7} < 2.7$. Spočteme hodnotu $2.65^2 = 7.0225$. Vidíme, že není nutné počítat mocniny čísel větších než 2.65 (takto vždy vyřadíme po prvním umocňování polovinu možných čísel a navíc nám spočtená hodnota umožňuje odhad dalšího čísla, které budeme mocnit – v tomto případě zřejmě 2.64. Můžeme tak zpřesnit odhad o jeden řád již po dvou výpočtech, v průměrném případě po třech, v nejhorším po čtyřech).

3. **Určení poslední platné číslice** – Máme-li nerovnost $2.64 < \sqrt{7} < 2.65$, můžeme rozhodnout zda poslední číslicí bude 4 nebo 5 výpočtem $2.645^2 = 6.996025$. Z tohoto

výsledku plyne, že $\sqrt{7} > 2.645$ a námi hledaná hodnota musí být 2.65 (již hodnota 2.645 by se zaokrouhlovala nahoru).

Shrnutí: Při usměřování násobíme zlomek jedničkou zapsanou tak, jak potřebujeme.