

## 1.2.11 Absolutní hodnota II

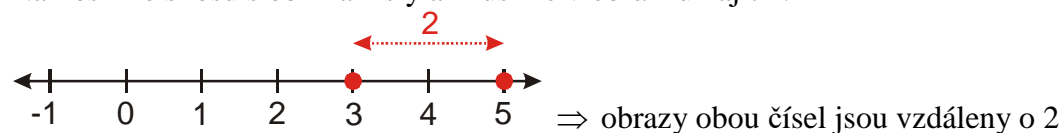
**Předpoklady:** 010210

**Pedagogická poznámka:** Řešení příkladu 1 (zvláště při každé "změně" zadání) je dobrým testem toho, jak jsou žáci schopni dodržovat pravidla v trošku se měnících situacích. Značná část z nich totiž při jakémkoli problému pravidla opouští a začne postupovat nahodile (například ignorovat absolutní hodnotu nebo číslo uvnitř). Cílem příkladu proto je, aby v takových situacích naopak postupovali přesně podle pravidla. První, co po nich v případě problémů chci je, aby si slovně napsali, jaká čísla hledají.

Další zajímavý postřeh

$$\begin{aligned} |5-3| &= |2| = 2 \\ |3-5| &= |-2| = 2 \end{aligned} \Rightarrow \text{stejně výsledky, nemá i absolutní hodnota z rozdílu geometrický význam?}$$

Nakreslíme si osu s oběma čísly a zkusíme v obrázku najít 2.



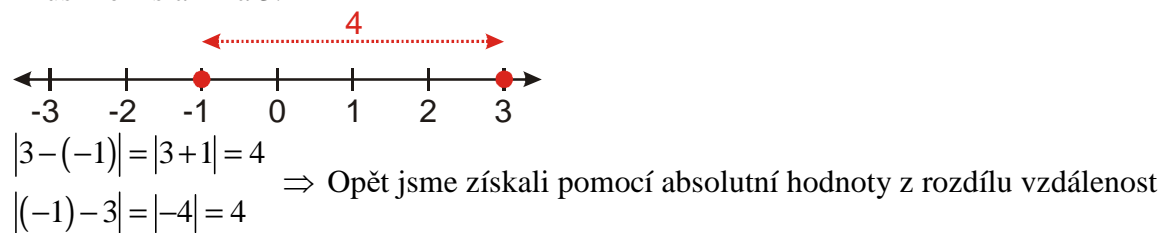
Je to rozumné?

Rozdíl dvou čísel ( $5-3$  nebo  $3-5$ ) nám říká, o kolik se čísla liší (jak jsou od sebe daleko), ale může vyjít kladný i záporný (podle toho, zda odečítáme větší číslo od menšího nebo opačně), zatímco vzdálenost je vždy kladná.

Absolutní hodnota z rozdílu je však vždy kladná (jako vzdálenost).

Platí to vždy? Například když je jedno z čísel záporné?

Zkusíme čísla  $-1$  a  $3$ .



**Vzdálenost obrazů reálných čísel  $a, b$  na číselné ose je rovna  $|a-b| = |b-a|$ .**

Předchozí věta je zobecnění předchozího pravidla (absolutní hodnota je vzdálenost obrazu od 0), můžeme totiž psát  $|x| = |x-0|$  (konkrétně například  $|3| = |3-0| = 3$ ).

Můžeme řešit další typ úloh.

Na číselné ose znázorní všechna reálná čísla, pro něž platí  $|x-3| < 2$ .

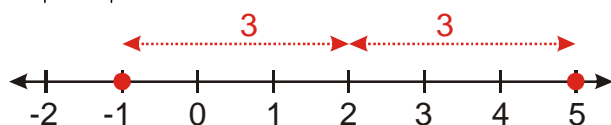
$|x-3| < 2 \Rightarrow$  hledáme čísla vzdálená od 3 méně než o dvě.



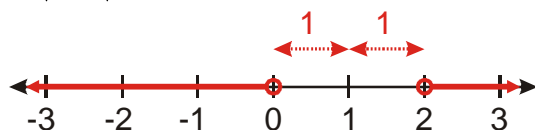
**Př. 1:** Na číselné ose znázorni všechna reálná čísla, pro něž platí:

- a)  $|x-2|=3$ ,                      b)  $|x-1|>1$ ,                      c)  $|x-0,5|\leq 1,5$ ,  
 d)  $|x-(-2)|\geq 1$ ,                      e)  $|x+1|\leq 2$ ,                      f)  $|x+2|>-1$ ,  
 g)  $|x-\sqrt{2}|<2$ ,                      h)  $|1-x|\leq 2$ .

a)  $|x-2|=3 \Rightarrow$  hledáme čísla vzdálená od 2 o tři.



b)  $|x-1|>1 \Rightarrow$  hledáme čísla vzdálená od 1 o víc než o 1.



c)  $|x-0,5|\leq 1,5 \Rightarrow$  hledáme čísla vzdálená od 0,5 o 1,5 nebo méně.



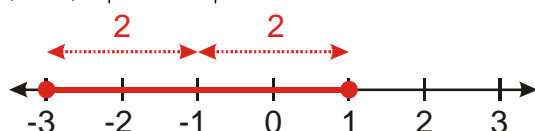
d)  $|x-(-2)|\geq 1 \Rightarrow$  hledáme čísla vzdálená od -2 o 1 nebo více.



e)  $|x+1|\leq 2$

**Problém:** V absolutní hodnotě není rozdíl čísel  $\Rightarrow$  musíme ho vyrobit:

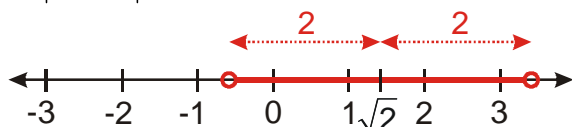
$|x+1|=|x-(-1)|\leq 2 \Rightarrow$  hledáme čísla vzdálená od -1 o 2 nebo méně.



f)  $|x+2|=|x-(-2)|>-1 \Rightarrow$  Hledáme čísla vzdálená od -2 o víc než o -1  $\Rightarrow$  to jsou všechna čísla (nejmenší – nulovou vzdálenost od čísla -2 má číslo -2).

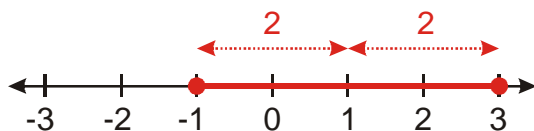


g)  $|x-\sqrt{2}|<2 \Rightarrow$  hledáme čísla vzdálená od  $\sqrt{2}$  méně než o dvě.



h)  $|1-x|\leq 2$

**Problém:** V absolutní hodnotě je  $x$  až druhé v pořadí  $\Rightarrow$  není to žádný problém, protože nezáleží na pořadí čísel v rozdílu a je možné si absolutní hodnotu přepsat  $|1-x|=|x-1|\leq 2 \Rightarrow$  hledáme čísla vzdálená od 1 o 2 nebo méně.



**Pedagogická poznámka:** Cíle jednotlivých bodů:

- a) část žáků má stále problém s tím, že pracují s absolutní hodnotou a při tom se objevují záporná čísla. V takové situaci mají tendenci vyznačit pouze 5 a číslo -1 "zapomenou"
- d) předzvěst bodu e), část žáků vnitřek upraví na  $|x - (-2)| \geq |x + 2|$ , čímž ztratí šanci na řešení.
- e) překonání problému se součtem v absolutní hodnotě. Je dobré opět připomenout, jak silná zbraň se skrývá v možnosti něco si napsat tak, jak potřebuji (ale tak, aby to zůstalo stejné)
- f) orientace v nezvyklé situaci. Ačkoliv příklad na první pohled nepřináší nic nového, studenti neví, v jaké vzdálenosti mají nakreslit body, ze kterých bude řešení vycházet. Připomínám, že pomůže návrat k podstatě, o kterou v příkladu jde.
- g) „znormálnění“ odmocnin
- h) opět orientace v nezvyklé situaci. Kdo si uvědomí, že na pořadí v rozdílu uvnitř absolutní hodnoty nezáleží? Zkusí někdo vytknout -1?

**Př. 2:** Do výrazu  $|x + 3|$  dosad' za  $x$  postupně čísla  $\{-7; -4; -3; -2; 0; 1\}$ . Na základě výsledků stanov pravidlo, pro která čísla dosazovaná za  $x$  mění absolutní hodnota znaménko výrazu uvnitř.  
Sestav předpis pro odstranění této absolutní hodnoty (ekvivalent definice absolutní hodnoty ze začátku kapitoly).

$x = -7$	$\Rightarrow$	$ x + 3  =  -7 + 3  =  -4  = 4$	$\Rightarrow$	změna znaménka
$x = -4$	$\Rightarrow$	$ x + 3  =  -4 + 3  =  -1  = 1$	$\Rightarrow$	změna znaménka
$x = -3$	$\Rightarrow$	$ x + 3  =  -3 + 3  =  0  = 0$	$\Rightarrow$	beze změny znaménka
$x = -2$	$\Rightarrow$	$ x + 3  =  -2 + 3  =  1  = 1$	$\Rightarrow$	beze změny znaménka
$x = 0$	$\Rightarrow$	$ x + 3  =  0 + 3  =  3  = 3$	$\Rightarrow$	beze změny znaménka
$x = 1$	$\Rightarrow$	$ x + 3  =  1 + 3  =  4  = 4$	$\Rightarrow$	beze změny znaménka

$\Rightarrow$  absolutní hodnota mění znaménko výrazu uvnitř, když za  $x$  dosadíme menší číslo než  $-3$ .

Původní definice:

Je-li  $a \geq 0$ , pak  $|a| = a$ . (s nezápornými čísly absolutní hodnota nic nedělá)

Je-li  $a < 0$ , pak  $|a| = -a$ . (záporným číslům absolutní hodnota změní znaménko na plus)

$\Rightarrow$  Absolutní hodnota se řídí znaménkem výrazu uvnitř  $\Rightarrow$  záleží na tom, zda je  $x + 3$  kladné nebo záporné.

$\Rightarrow$  Pro  $|x + 3|$  platí:

- Je-li  $x \geq -3$ , pak  $|x+3| = x+3$ . (výraz  $x+3$  je kladný, nic se nemění)
- Je-li  $x < -3$ , pak  $|x+3| = -(x+3) = -x-3$ . (výraz  $x+3$  je záporný, absolutní hodnota mu změnila znaménko)

**Pedagogická poznámka:** Předchozí příklad je předehra k „metodě dělení definičního oboru“, tedy ke všem postupům (nerovnosti v podílovém tvaru, rovnice, nerovnice, funkce s absolutní hodnotou), kde při řešení příkladu musíme vytvořit několik různých větví.

**Shrnutí:** Absolutní hodnota z rozdílu dvou čísel se rovná vzdálenosti jejich obrazů na číselné ose.