## 1.2.11 Absolutní hodnota II

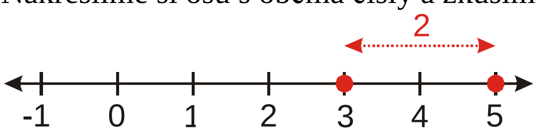
**Předpoklady:** 010210

**Pedagogická poznámka:** Řešení příkladu 1 (zvláště při každé "změně" zadání) je dobrým testem toho, jak jsou žáci schopni dodržovat pravidla v trošku se měnících situacích. Značná část z nich totiž při jakémkoli problému pravidla opouští a začne postupovat nahodile (například ignorovat absolutní hodnotu nebo číslo uvnitř). Cílem příkladu proto je, aby v takových situacích naopak postupovali přesně podle pravidla. První, co po nich v případě problémů je, aby si napsali, jaká čísla hledají.

Další zajímavý postřeh

$|5-3|=|2|=2$
$|3-5|=|-2|=2$ $\Rightarrow$ stejné výsledky, nemá i absolutní hodnota z rozdílu geometrický význam?

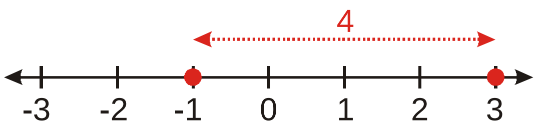
Nakreslíme si osu s oběma čísly a zkusíme v obrázku najít 2.




$\Rightarrow$ obrazy obou čísel jsou vzdáleny o 2

Je to rozumné?
Rozdíl dvou čísel ($5-3$ nebo $3-5$) nám říká, o kolik se čísla liší (jak jsou od sebe daleko), ale může vyjít kladný i záporný (podle toho, zda odečítáme větší číslo od menšího nebo opačně), zatímco vzdálenost je vždy kladná.
Absolutní hodnota z rozdílu je však vždy kladná (jako vzdálenost).

Platí to vždy? Například když je jedno z čísel záporné?
Zkusíme čísla –1 a 3.



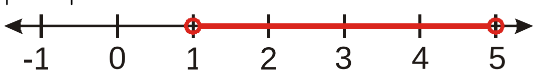

$|3-(-1)|=|3+1|=4$
$|(-1)-3|=|-4|=4$ $\Rightarrow$ Opět jsme získali pomocí absolutní hodnoty z rozdílu vzdálenost obrazů na ose $\Rightarrow$ pravidlo zřejmě platí vždy.

**Vzdálenost obrazů reálných čísel *a*, *b* na číselné ose je rovna $|a-b|=|b-a|$.**

Předchozí věta je zobecnění předchozího pravidla (absolutní hodnota je vzdálenost obrazu od 0), můžeme totiž psát $|x|=|x-0|$ (konkrétně například $|3|=|3-0|=3$.

Můžeme řešit další typ úloh.
Na číselné ose znázorni všechna reálná čísla, pro něž platí $|x-3|<2$.

$|x-3|<2$ $\Rightarrow$ hledáme čísla vzdálená od 3 méně než o dvě.



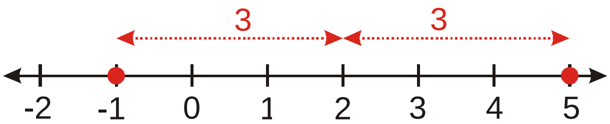
**Př. 1:** Na číselné ose znázorni všechna reálná čísla, pro něž platí:

a) $|x-2|=3$, b) $|x-1|>1$, c) $|x-0,5|\leq 1,5$,

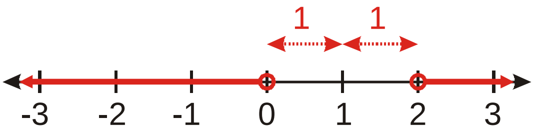
d) $|x-(-2)|\geq 1$, e) $|x+1|\leq 2$, f) $|x+2|>-1$,

g) $|x-\sqrt{2}|<2$, h) $|1-x|\leq 2$.

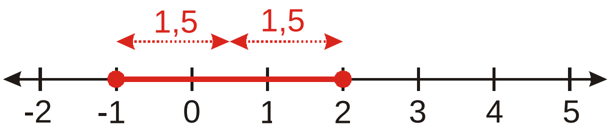
a) $|x-2|=3 \Rightarrow$ hledáme čísla vzdálená od 2 o tři.



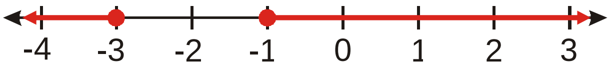

b) $|x-1|>1 \Rightarrow$ hledáme čísla vzdálená od 1 o víc než o jedna.




c) $|x-0,5|\leq 1,5 \Rightarrow$ hledáme čísla vzdálená od 0,5 o 1,5 nebo méně.



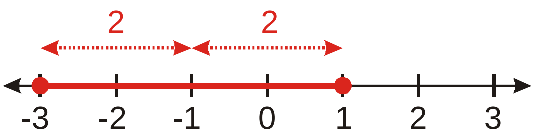

d) $|x-(-2)|\geq 1 \Rightarrow$ hledáme čísla vzdálená od -2 o 1 nebo více.



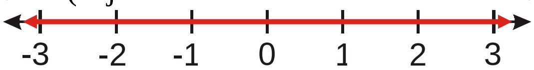

e) $|x+1|\leq 2$

**Problém:** V absolutní hodnotě není rozdíl čísel $\Rightarrow$ musíme ho vyrobit:

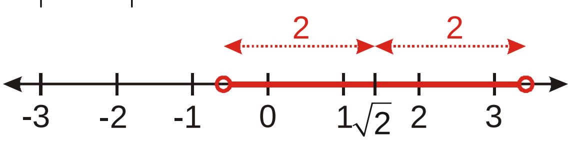
$|x+1|=|x-(-1)|\leq 2 \Rightarrow$ hledáme čísla vzdálená od -1 o dva nebo méně.




f) $|x+2|=|x-(-2)|>-1 \Rightarrow$ Hledáme čísla vzdálená od -2 o víc než o $-1 \Rightarrow$ to jsou všechna čísla (nejmenší – nulovou vzdálenost od čísla –2 má číslo –2).

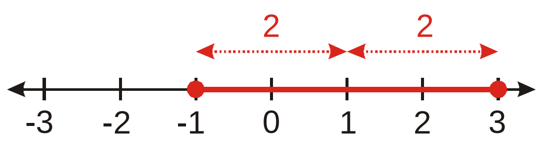



g) $|x-\sqrt{2}|<2 \Rightarrow$ hledáme čísla vzdálená od $\sqrt{2}$ méně než o dvě.




h) $|1-x|\leq 2$

**Problém:** V absolutní hodnotě je $x$ až druhé v pořadí $\Rightarrow$ není to žádný problém, protože nezáleží na pořadí čísel v rozdílu a je možné si absolutní hodnotu přepsat $|1-x|=|x-1|\leq 2 \Rightarrow$ hledáme čísla vzdálená od 1 o dva nebo méně.




**Pedagogická poznámka:** Cíle jednotlivých bodů:

a) část žáků má stále problém s tím, že pracují s absolutní hodnotou a při tom se objevují záporná čísla. V takové situaci mají tendenci vyznačit pouze 5 a číslo -1 "zapomenou"

d) předzvěst bodu e), část žáků vnitřek upraví na $|x-(-2)| \geq |x+2|$, čímž ztratí šanci na řešení.

e) překonání problému se součtem v absolutní hodnotě, je dobré opět připomenout, jak silná zbraň se skrývá v možnosti něco si napsat tak, jak potřebuji (ale tak, aby to zůstalo stejné)

f) orientace v nezvyklé situaci, ačkoliv příklad na první pohled nepřináší nic nového, studenti neví,v jaké vzdálenosti mají nakreslit body, ze kterých bude řešení vycházet. Připomínám, že pomůže návrat k podstatě, o kterou v příkladu jde.

g) „znormálnění" odmocnin

h) opět orientace v nezvyklé situaci. Kdo si uvědomí, že na pořadí v rozdílu uvnitř absolutní hodnotě nezáleží? Zkusí někdo vytknout –1?

**Př. 2:** Do výrazu $|x+3|$ dosaď za $x$ postupně čísla $\{-7;-4;-3;-2;\ 0;1\}$. Na základě výsledků stanov pravidlo, pro která čísla dosazovaná za $x$ mění absolutní hodnota znaménko výrazu uvnitř.
Sestav předpis pro odstranění této absolutní hodnoty (ekvivalent definice absolutní hodnoty ze začátku kapitoly).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x=-7$ | $\Rightarrow$ | $\lvert x+3\rvert=\lvert -7+3\rvert=\lvert -4\rvert=4$ | $\Rightarrow$ | změna znaménka |
| $x=-4$ | $\Rightarrow$ | $\lvert x+3\rvert=\lvert -4+3\rvert=\lvert -1\rvert=1$ | $\Rightarrow$ | změna znaménka |
| $x=-3$ | $\Rightarrow$ | $\lvert x+3\rvert=\lvert -3+3\rvert=\lvert 0\rvert=0$ | $\Rightarrow$ | bez změny znaménka |
| $x=-2$ | $\Rightarrow$ | $\lvert x+3\rvert=\lvert -2+3\rvert=\lvert 1\rvert=1$ | $\Rightarrow$ | bez změny znaménka |
| $x=0$ | $\Rightarrow$ | $\lvert x+3\rvert=\lvert 0+3\rvert=\lvert 3\rvert=3$ | $\Rightarrow$ | bez změny znaménka |
| $x=1$ | $\Rightarrow$ | $\lvert x+3\rvert=\lvert 1+3\rvert=\lvert 4\rvert=4$ | $\Rightarrow$ | bez změny znaménka |

$\Rightarrow$ absolutní hodnota mění znaménko výrazu uvnitř, když za $x$ dosadíme menší číslo než –3.

Původní definice:

Je-li $a \geq 0$, pak $|a|=a$. (s nezápornými čísly absolutní hodnota nic nedělá)

Je-li $a<0$, pak $|a|=-a$. (záporným číslům absolutní hodnota změní znaménko na plus)

$\Rightarrow$ Absolutní hodnota se řídí znaménkem výrazu uvnitř $\Rightarrow$ záleží zda je $x+3$ kladné nebo záporné.

$\Rightarrow$ Pro $|x+3|$ platí:

- Je-li $x \geq -3$, pak $|x+3| = x+3$. (výraz $x+3$ je kladný, nic se nemění)
- Je-li $x < -3$, pak $|x+3| = -(x+3) = -x-3$. (výraz $x+3$ je záporný, absolutní hodnota mu změní znaménko)

**Pedagogická poznámka:** Předchozí příklad je předehra k „metodě dělení definičního oboru“, tedy ke všem postupům (nerovnosti v podílovém tvaru, rovnice, nerovnice, funkce s absolutní hodnotou), kde při řešení příkladu musíme vytvořit několik různých větví.

**Shrnutí:** Absolutní hodnota z rozdílu dvou čísel se rovná vzdálenosti jejich obrazů na číselné ose.