1.3.5 Nekonečné množiny

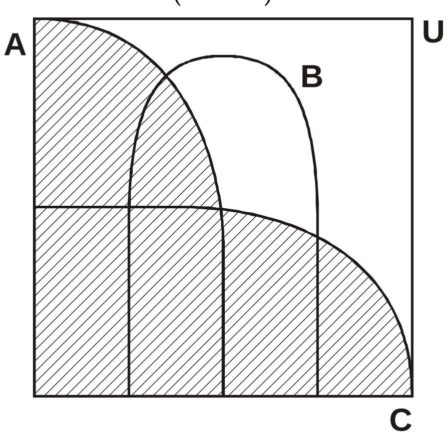
Předpoklady: 010304

Pedagogická poznámka: Tuto hodinu je možné přeskočit. Obsahuje další příklady na Vennovy diagramy a úvodní povídaní o nekonečnu (na porovnávání množin). Právě druhá část hodiny je dobrým indikátorem nálady ve třídě. Mnohé z toho, co padne, je pro žáky velmi těžko přijatelné, takže pokud se nikdo nebude bránit, buď se Vás bojí, nebo jim vůbec nestojí za to se s Vámi bavit. Na druhou stranu právě šokující závěry vytvářejí speciální atmosféru, která se objevuje jen zřídka.

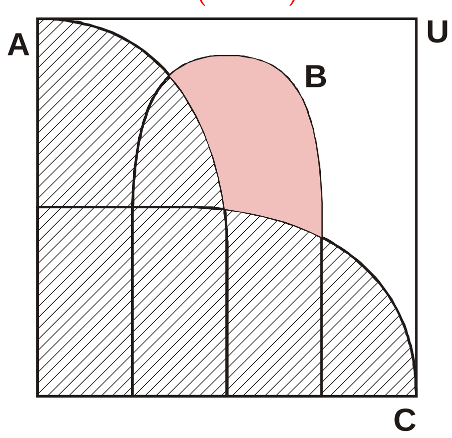
Př. 1: Vyznač ve Vennově diagramu množinu.
a) $B\setminus(A\cup C)$ b) $(A\cup C)\cap(B'\cup C')$

a) $B\setminus(A\cup C)$

$(A\cup C)$

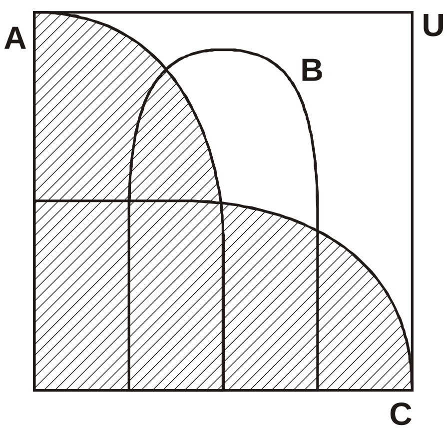


$B\setminus(A\cup C)$



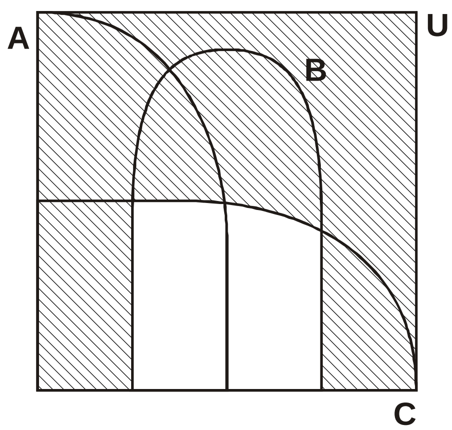
b) $(A\cup C)\cap(B'\cup C')$

$(A\cup C)$

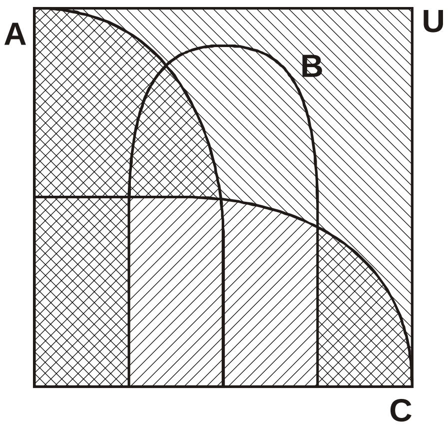


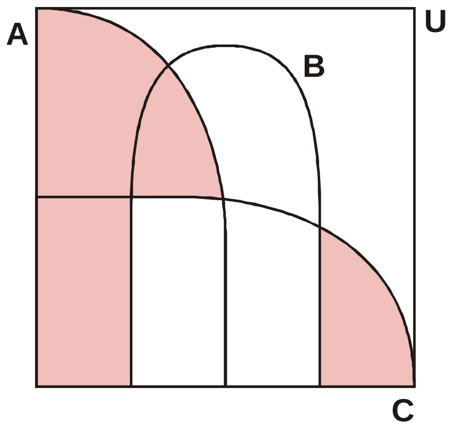
$(A\cup C)\cap(B'\cup C')$

$(B'\cup C')$



$(A\cup C)\cap(B'\cup C')$

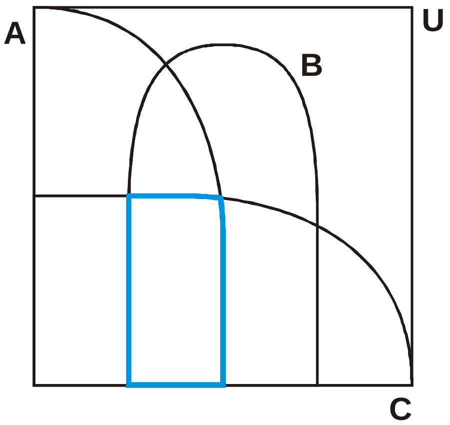




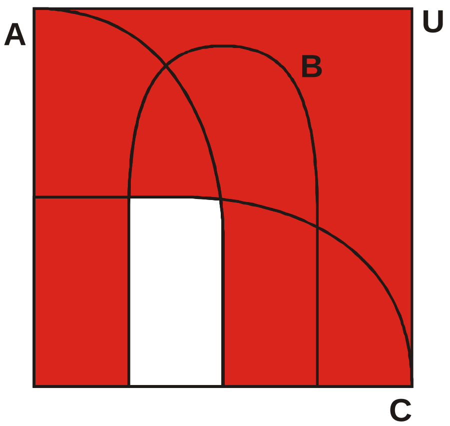
Př. 2: Pomocí Vennových diagramů rozhodni, zda platí: $(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'$.

Postup: Každou stranu rovnice na jeden obrázek, postupně zakreslujeme pomocí barev, abychom si nemuseli pořád všechno odvozovat od začátku.

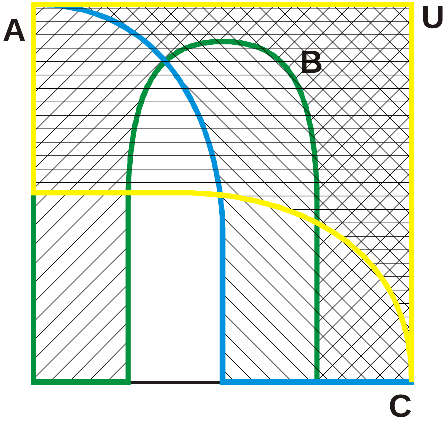
$A \cap B \cap C$



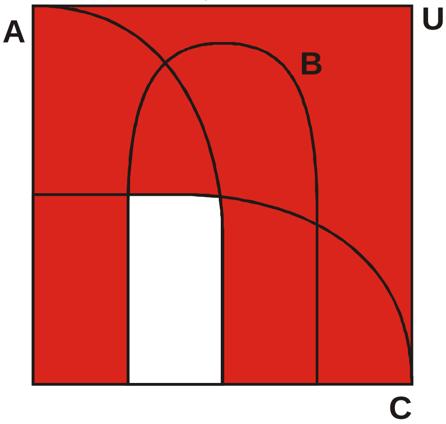
$(A \cap B \cap C)'$ - doplněk předchozího průniku v množině U.



Vyznačíme množiny $A'; B'; C'$.



$A' \cup B' \cup C'$ - sjednotíme nakreslené množiny.

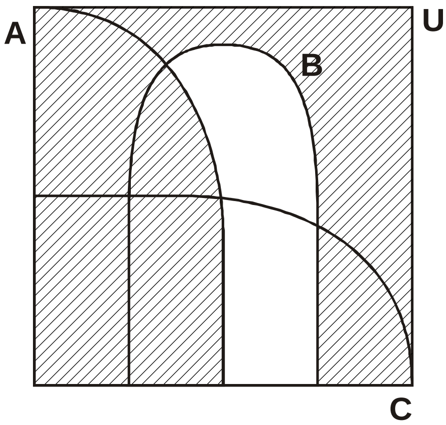


Pro obě strany rovnosti jsme získali stejný obrázek, rovnost platí.

Pedagogická poznámka: Následující příklad slouží k vyrovnání třídy, jakmile k němu dorazí pomalejší část třídy, zkontrolujeme si výsledek a jdeme dál.

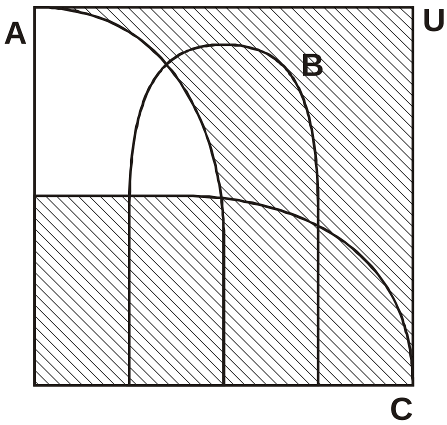
Př. 3: Vyznač do Vennova diagramu množinu $(A \cup B') \cap (C \cup A')$. Odhadni, jak bude vypadat množina $(A \cup B') \cap (C \cup A') \cap (B \cup C')$. Vyjádři výslednou množinu jiným způsobem.

$(A \cup B')$

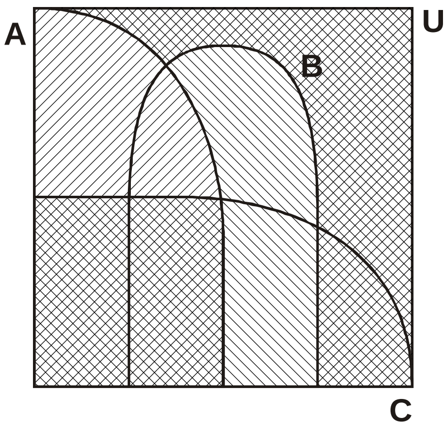


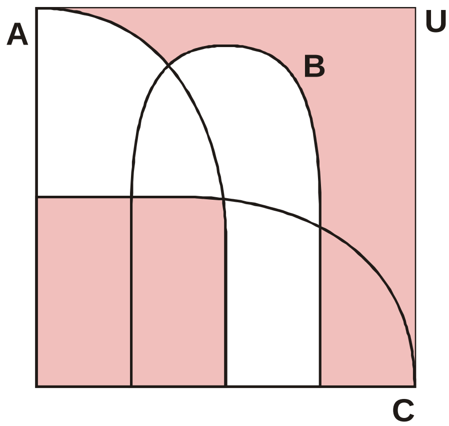
$(A \cup B') \cap (C \cup A')$

$(C \cup A')$

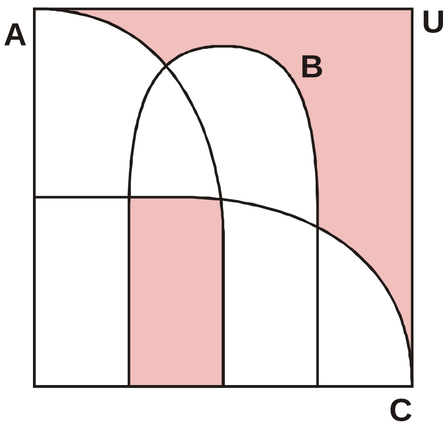


$(A \cup B') \cap (C \cup A')$





Odhad množiny $(A\cup B')\cap(C\cup A')\cap(B\cup C')$:

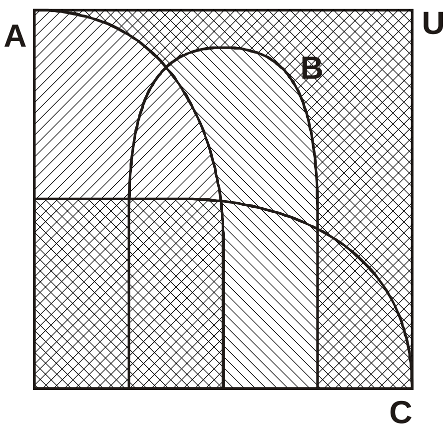


Do vyjádření množiny přibyl průnik s množinou $(B\cup C')$ $\Rightarrow$ výsledek bude zabírat menší plochu než množina $(A\cup B')\cap(C\cup A')$.

Množina $(B\cup C')$ neobsahuje pole, která nejsou v množině B a jsou v množině C $\Rightarrow$ tato pole nebudou ve výsledku.

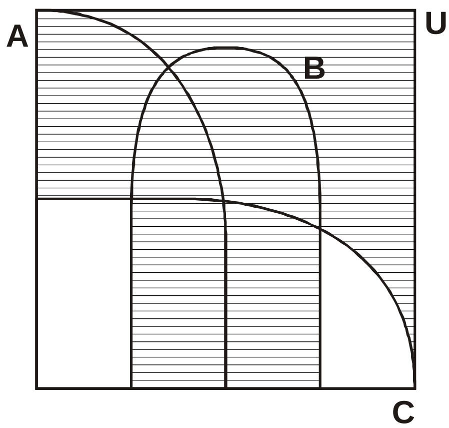
Řešení:

$(A\cup B')\cap(C\cup A')$

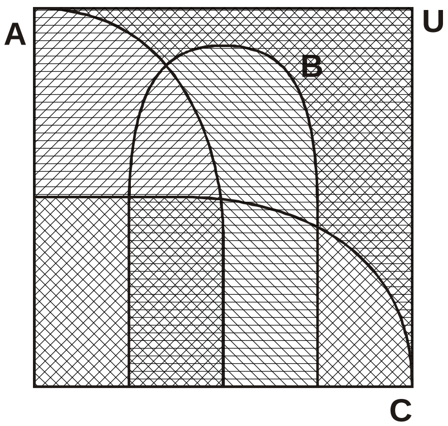


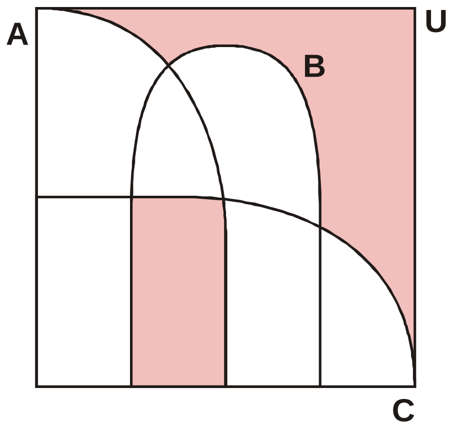
$(A\cup B')\cap(C\cup A')\cap(B\cup C')$

$(B\cup C')$



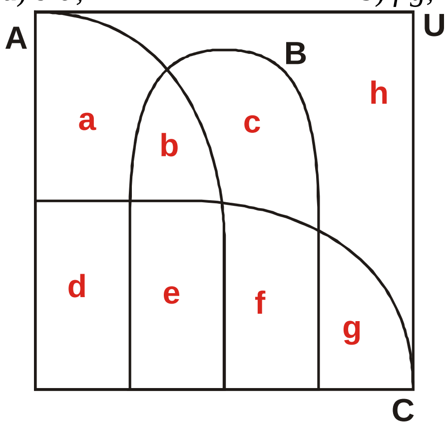
$(A\cup B')\cap(C\cup A')\cap(B\cup C')$



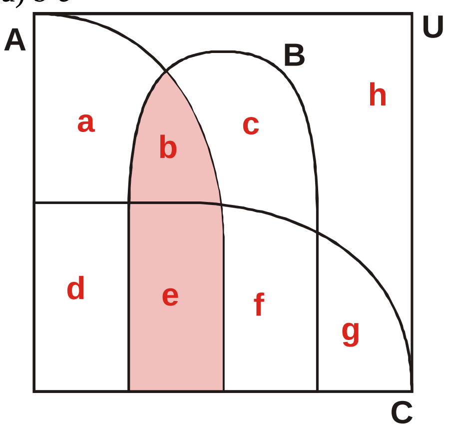


Jiné vyjádření výsledku: $(A\cup B')\cap(C\cup A')\cap(B\cup C')=(A\cap B\cap C)\cup(A'\cap B'\cap C')'$.

Př. 4: Na obrázku je standardní označení polí ve Vennově diagramu pro tři množiny. Vyjádři pomocí množin *A*, *B*, *C* a *U* následující množiny vzniklé sjednocením polí:
a) *b e*, b) *f g*, c) *a b e*

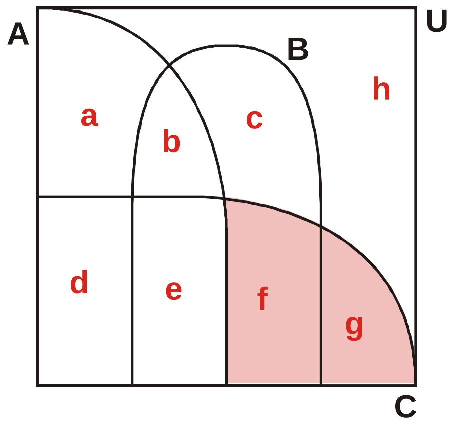


a) *b e*



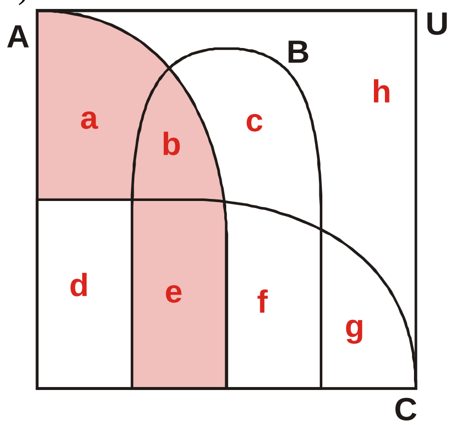
Možná vyjádření červené množiny:
$A\cap B$

b) *f g*



Možná vyjádření červené množiny:
$C \setminus A$

c) *a b e*



Možná vyjádření červené množiny:
$(A \setminus C) \cup (A \cap B \cap C)$
$[A \setminus (A \cap C)] \cup (A \cap B \cap C)$

Vrátíme se skoro na začátek množin:

Jak určit počet prvků množiny?
- U konečné množiny počet prvků spočítáme bez problému.
- **Problém:** Jak určit počet prvků u nekonečných množin?

Řešení (částečné): Pospojujeme prvky množiny *A* s prvky množiny *B* vzájemně jednoznačně (Každý prvek *A* má právě jeden prvek množiny *B* a obráceně. Analogie vytváření párů při tanci. V každé dvojici je právě jeden kluk a právě jedna holka).
Pokud ani v jedné množině nezůstane žádný prvek bez partnera z druhé množiny, je počet prvků v obou množinách stejný (jakmile na tanečních proběhne volenka a utvoří se páry, hned vidíme, jestli bylo stejně kluků a holek).

Tento postup by měl fungovat i u nekonečných množin.

Př. 5: Porovnej počet přirozených a sudých přirozených čísel.

Na první pohled se zdá, že přirozených čísel je dvakrát víc (lichá polovina přirozených čísel v množině sudých chybí). Omyl. Provedeme pospojování:

přirozená čísla: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

sudá čísla: 2, 4, 6, 8, 10, ...

Každé přirozené číslo má partnera (dvakrát větší číslo z množiny sudých čísel) $\Rightarrow$ žádné přirozené (ani žádné sudé) číslo nezbylo na ocet $\Rightarrow$ sudých čísel je stejný počet jako čísel přirozených.

Šokující závěr. Jak je možné, že "polovina čísel v množině sudých čísel chybí" a přesto jich je stejně jako přirozených?
Může za to nekonečno:

- nekonečně není nějaké obyčejné jen největší číslo, ale je to něco úplně jiného,
- řada přirozených čísel nemá poslední člen, za každým číslem bezprostředně následuje další o jedno větší,

$\Rightarrow$ pokud chceme přemýšlet o nekonečnu musíme být opatrní a vzdát se některých představ souvisejících s konečnými čísly.

Hilbertův hotel
Hilbertův hotel s nekonečně mnoho jednolůžkovými pokoji. Pokoje jsou očíslovány přirozenými čísly. Hotel je plně obsazen, v každém je jeden host.

Př. 6: Na recepci plně obsazeného Hilbertova hotelu se dostaví tři turisté a chtějí se také ubytovat. Je možné jim poskytnout ubytování, aniž bychom někoho z ubytovaných vystěhovali pryč z hotelu?

Ano, všichni z ubytovaných opustí svůj pokoj a nastěhují se do pokoje s číslem o 3 větším $\Rightarrow$ pokoje 1, 2, 3 jsou volné a je možné do nich ubytovat další zájemce.

Př. 7: Navrhni způsob, jak do plně obsazeného Hilbertova hotelu ubytovat pět dalších turistů.

Všichni z ubytovaných opustí svůj pokoj a nastěhují se do pokoje s číslem o 5 větším $\Rightarrow$ pokoje 1, 2, 3, 4 a 5 budou volné a bude možné do nich ubytovat další zájemce.

Stejným způsobem je možné ubytovat každý konečný počet turistů.

Př. 8: Navrhni způsob, jak do plně obsazeného Hilbertova hotelu ubytovat nekonečně mnoho nově příchozích turistů (počet příchozích turistů je stejný jako počet přirozených čísel).

Stačí, aby se všichni přestěhovali na pokoj jeho číslo je dvakrát větší. Všechny liché pokoje zůstanou volné a můžeme do nich ubytovat nekonečně mnoho nově příchozích turistů.

Pedagogická poznámka: Diskuse o Hibertově hotelu studenty baví. Občas se najdou takoví, kteří dokonce samostatně vyřeší příklad 6. Řešení další příkladů je pak pro žáku daleko jednodušší.

Důsledky pro uvažování o nekonečnu:

- Když k nekonečnu přičteme konečné číslo, nekonečno se nezmění.
- Když půjdeme po nekonečné přímce, v jakékoliv vzdálenosti od počátku budeme od cíle pořád stejně daleko, pořád před námi bude nekonečně velká vzdálenost.

Pedagogická poznámka: Následující příklad ukazuji na samém konci hodiny. Zájemci se mohou pokusit ho vyřešit samostatně (pravděpodobnost úspěchu je malá). Příklad má motivační smysl kvůli následujícím dvěma hodinám. Mnozí žáci považují při řešení množinových příkladů na dvě podmnožiny postup přes Vennovy diagramy za zbytečně složitý. Pokud si nejdříve ověří, že tři množiny už se bez formalismu řeší jen velice obtížně, přijímají zavádění formalismu na jednodušších příkladech ochotněji.

Př. 9: Písemná práce z matematiky, které se zúčastnilo 35 studentů, obsahovala tři úlohy. Dva studenti vyřešili jenom první úlohu a tři studenti jenom druhou úlohu. První a druhou úlohu vyřešilo 16 studentů, druhou a třetí 14 studentů. Všechny úlohy vyřešilo 10 studentů, první nebo třetí 31 studentů a 3 studenti nevyřešili ani první ani druhou úlohu. Kolik studentů vyřešilo:
a) aspoň dvě úlohy, b) aspoň jednu úlohu.

Shrnutí: Nekonečno není žádné největší číslo, chová v mnohém zcela jinak než obyčejná čísla.