1.3.6 Řešení slovních úloh pomocí Vennových diagramů I

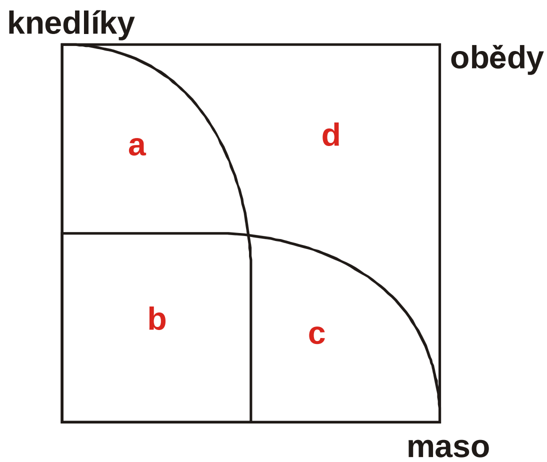
Předpoklady: 010304, řešení rovnic

Pedagogická poznámka: Řešení slovních množinových úloh pomocí Vennových diagramů mně přijde zajímavé a přínosné z těchto důvodů:
- jde o první příležitost, kdy se studenti snaží zapsat slovní zadání pomocí písmen a proměnných, učí se postupovat přesně podle textu a zohledňovat každé slovo,
- řešení úloh vyžaduje systematický postup a dlouhou dobu není vidět výsledek (to činí mnoha klukům obrovské problémy. Začnou ihned počítat nějaké částečné výsledky, které nedokáží spojit dohromady, ale standardní postup jim přijde příliš zdlouhavý),
- studenti poznají, že pokud se drží algoritmu a nepospíchají dostanou se k výsledku i ve zdánlivě beznadějné situaci.

Poznámka: Je zcela zřejmé, že první dva příklady je možné vyřešit úvahou daleko rychleji. Jsou zde uvedeny hlavně kvůli zvládnutí metody.

Poznámka: U všech následujících příkladů je samozřejmě zcela jedno, jak si je zakreslíte do obrázků nebo jak si označíte jednotlivé části diagramu. Pokud však chcete spolupracovat a kontrolovat si svoji práci s ostatními nezbývá než se na začátku každého příkladu domluvit a použít stejné značení.

Př. 1: K obědu byla svíčková s knedlíkem. Kuchařky u okénka se špinavým nádobím provedly výzkum vrácených talířů od hlavního jídla. Alespoň kus knedlíku vrátilo 301 strávníků, kus knedlíku nebo maso dokonce 328 z nich. Ani kousek masa nebyl na 554 talířích, pouze maso nebo pouze knedlík vrátilo 250 obědvajících.
a) Kolik lidí snědlo všechno?
b) Kolik strávníků tento den jedlo?
c) Kolik obědvajících vrátilo maso i knedlíky?



Máme čtyři proměnné, potřebujeme čtyři rovnice. Každé číslo v zadání většinou vede k jedné rovnici.

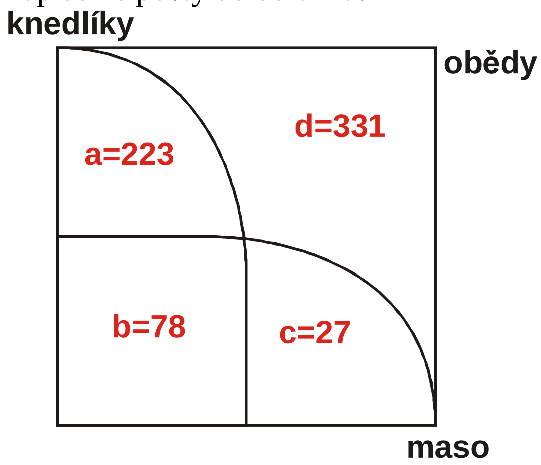
Alespoň kus knedlíku vrátilo 301 strávníků $\Rightarrow$ $a+b=301$.
Kus knedlíku nebo maso dokonce 328 z nich $\Rightarrow$ $a+b+c=328$.
Ani kousek masa nebyl na 554 talířích $\Rightarrow$ $a+d=554$.

Pouze maso nebo pouze knedlík vrátilo 250 $\Rightarrow$ $a+c=250$.

$a+b=301$
$a+b+c=328$
$a+d=554$
$a+c=250$

Dosadíme za $a+b$ do druhé rovnice: $301+c=328 \Rightarrow c=27$.
Dosadíme za c do čtvrté rovnice: $a+27=250 \Rightarrow a=223$.
Dosadíme za a do první rovnice: $223+b=301 \Rightarrow b=78$.
Dosadíme za a do třetí rovnice: $223+d=554 \Rightarrow d=331$.

Zapíšeme počty do obrázku.

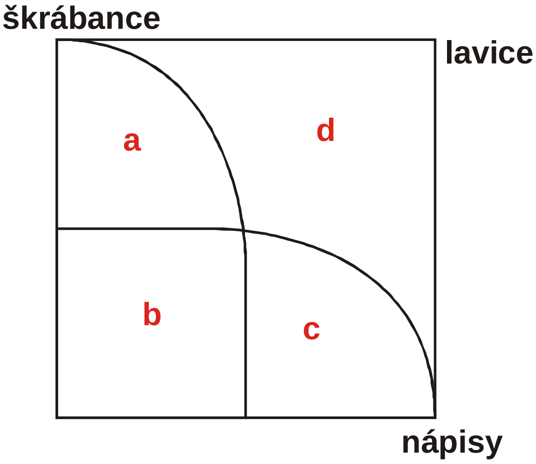


Nyní odpovíme na otázky.
Všechno snědlo 331 lidí (množina d), jedlo 659 strávníků (množina $a+b+c+d$), maso i knedlíky vrátilo 78 lidí.

Pedagogická poznámka: První příklad řešíme při výuce společně. Na tabuli nakreslím diagram, označím množiny a napíšeme společně první rovnici. Pak čteme další údaje ze zadání a každý sestavuje rovnice, které nechodím moc kontrolovat do lavice, ale ukazujeme si je po chvilce na tabuli.
Druhý příklad řešíme podobně, ale snažím se nechávat žákům větší prostor.
Ve čtvrtém příkladu postupují víceméně sami. Nejdříve sestaví soustavu rovnic, kterou si musí nechat schválit ode mě a pak se ji snaží dopočítat. Postupujeme tak, abychom třetí příklad a rovnice čtvrtého dokázali zkontrolovat na tabuli společně.
I když se tři příklady mohou zdát málo, nezažil jsem ještě situaci, že by někdo neměl na konci hodiny, co dělat, většinou skončí hodina tak, že většina třídy má napsané rovnice z příkladu 4, ale dořešit je musí doma.

Pedagogická poznámka: Nejčastější problémy při sestavování rovnic. Použití spojky nebo, znamená že tam patří i talíře, na kterých je knedlík i maso najednou (to samé s popsanými a poškrábanými lavicemi v dalším příkladě). Ptám se jich: Máš na talíři knedlík, když vracíš obojí?“ „Je na lavici která je popsaná i poškrábaná nějaký škrábanec“?

Př. 2: Z 15 kontrolovaných lavic je poškrábaných nebo popsaných 14 kusů. 10 lavic má nejvýše jeden druh poškození. Poškrábaných lavic je o 3 více než popsaných. Kolik lavic je:
a) jenom poškrábaných, b) poškrábaných i popsaných.



Máme čtyři proměnné (určují počet prvků v jednotlivých polích diagramu), potřebujeme čtyři rovnice. Každé číslo v zadání většinou vede k jedné rovnici.

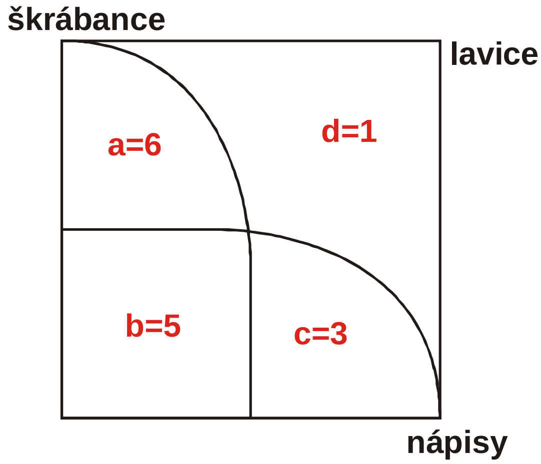
Z 15 lavic $\Rightarrow$ $a+b+c+d=15$.
14 poškrábaných nebo popsaných $\Rightarrow$ $a+b+c=14$ (popsaná nebo pokreslená je i lavice poškozená oběma způsoby).
10 lavic má nejvýše jeden druh poškození $\Rightarrow$ $a+c+d=10$ (nejvýše jeden znamená jeden nebo žádný).
Poškrábaných lavic je o 3 více než popsaných $\Rightarrow$ $a+b=b+c+3$ (poškrábané lavice jsou buď jenom poškrábané nebo poškrábané i popsané, k počtu popsaných musíme přidat 3, aby se vyrovnal poškrábaným).

$a+b+c+d=15$
$a+b+c=14$
$a+c+d=10$
$a+b=b+c+3$

Dosadíme za $a+b+c$ do první rovnice: $14+d=15 \Rightarrow d=1$.
Dosadíme za d do třetí rovnice: $a+c+1=10 \Rightarrow a+c=9$.
Upravíme čtvrtou rovnici: $a=c+3$.

Dosadíme za a do třetí rovnice $a+c=c+3+c=2c+3=9 \Rightarrow c=3$.
Dopočteme a: $a=c+3=3+3=6$.
Z druhé rovnice spočteme b: $6+b+3=14 \Rightarrow b=5$.

Zapíšeme počty do obrázku:



Nyní odpovíme na otázky:
Jenom poškrábaných je 6 lavic (množina *a*), poškrábaných i popsaných je 5 lavic (množina *b*).

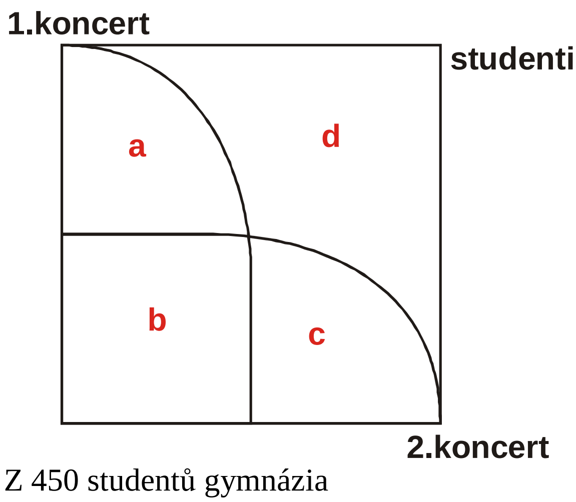
Př. 3: Zapiš v bodech postup na řešení slovních o počtech prvků úloh pomocí Vennových diagramů. Na co musíme při řešení dávat pozor?

- Podle zadání zvolíme množiny a podle jejich počtu nakreslíme diagram.
- Zachytíme situaci pomocí jednotlivých oblastí v diagramu do rovnic (jedno číslo v zadání vede obvykle k jedné rovnici).
- Získanou soustavu rovnic vyřešíme.

Největší zádrhele:

- Jak přepsat slovní zadání do rovnic (hlavně významy slov nebo, právě jeden, nejméně dva apod.).
- Neztratit přehled o soustavě rovnic a vyřešit ji.

Př. 4: Během jednoho roku vystoupila dvakrát v jednom městě známá rocková skupina . Z 450 studentů gymnázia se koncertu této skupiny aspoň jednou zúčastnilo 290 studentů, právě jednou 200 studentů. Počet studentů, kteří byli pouze na prvním koncertu, je třikrát větší než počet studentů, kteří byli pouze na druhém. Kolik studentů bylo: a) na 1. koncertu, b) na druhém koncertu.



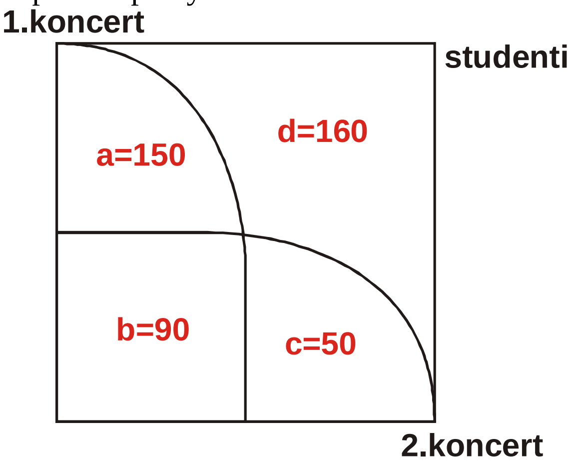
Z 450 studentů gymnázia $\Rightarrow$ $a+b+c+d=450$.
Koncertu se aspoň jednou zúčastnilo 290 studentů $\Rightarrow$ $a+b+c=290$.
Zúčastnilo se právě jednou 200 studentů $\Rightarrow$ $a+c=200$.

Počet studentů, kteří byli pouze na prvním koncertu, je třikrát větší než počet studentů, kteří byli pouze na druhém $\Rightarrow$ $a = 3c$.

Získali jsme soustavu rovnic.
$a + b + c + d = 450$
$a + b + c = 290$
$a + c = 200$
$a = 3c$

Dosadíme za $a + b + c$ do první rovnice: $290 + d = 450 \Rightarrow d = 160$.
Dosadíme za $a + c$ do druhé rovnice: $200 + b = 290 \Rightarrow b = 90$.
Dosadíme $a = 3c$ do třetí rovnice: $3c + c = 200 \Rightarrow c = 50$.
Dopočítáme $a = 3c = 150$.

Zapíšeme počty do obrázku.



Nyní odpovíme na otázky.
Na prvním koncertu bylo 240 studentů (množiny *a* a *b*).
Na druhém koncertu bylo 140 studentů (množiny *b* a *c*).

Shrnutí: Systematický postup umožňuje řešit i velmi těžké příklady.