

1.3.8 Intervaly

Předpoklady: 010210, 010301, 010302, 010303

Problém

Množinu $A = \{x \in \mathbb{Z}; 2 \leq x \leq 5\}$ zapíšeme snadno i výčtem: $A = \{2; 3; 4; 5\}$.

Jak zapsat množinu $B = \{x \in \mathbb{R}; 2 \leq x \leq 5\}$?

Jde o nekonečně mnoho čísel (2, 5 a všechno mezi nimi) \Rightarrow existuje úspornější zápis:

$$B = \{x \in \mathbb{R}; 2 \leq x \leq 5\} = \langle 2; 5 \rangle$$

Zápis $\langle 2; 5 \rangle$ znamená: Do zapsané množiny patří čísla 2, 5 a všechno mezi nimi \Rightarrow význam číslic je jasný, závorky znamenají „a všechno mezi nimi“. Této množině říkáme **interval (uzavřený)**.

Jak zapíšeme množinu $C = \{x \in \mathbb{R}; 3 < x < \sqrt{40}\}$?

Opět nekonečně mnoho čísel (všechno mezi 3 a $\sqrt{40}$) \Rightarrow podobné jako předtím, ale bez krajních bodů (3 ani $\sqrt{40}$ mezi čísla v množině nepatří) \Rightarrow použijeme stejný systém, ale změníme závorky (aby bylo vidět, že krajní body do množiny nepatří):

$$C = \{x \in \mathbb{R}; 3 < x < \sqrt{40}\} = (3; \sqrt{40}). \text{ Této množině říkáme } \mathbf{interval \ (otevřený)}.$$

Př. 1: Zapiš pomocí intervalu následující množiny.

a) $A = \{x \in \mathbb{R}; -2 \leq x < \pi\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{Z}; 1 \leq x \leq \sqrt{5}\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x < \sqrt{7}\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R}; |x| < \sqrt{2}\}$

a) $A = \{x \in \mathbb{R}; -2 \leq x < \pi\} = \langle -2; \pi \rangle$



b) $B = \{x \in \mathbb{Z}; 1 \leq x \leq \sqrt{5}\}$ - nejde, x je pouze z celých čísel \Rightarrow na ose pouze body.



c) $C = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x < \sqrt{7}\} = \langle 0; \sqrt{7} \rangle$

d) $D = \{x \in \mathbb{R}; |x| < \sqrt{2}\} = (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$

Pedagogická poznámka: Jediné problémy jsou s bodem b), kde studenti často zapomínají, že zápis $\langle 1; \sqrt{5} \rangle$ znamená 1 a $\sqrt{5}$ a „všechna čísla mezi nimi“ a není možné jej použít na zápis podmnožiny celých čísel.

Přehled omezených intervalů.

Charakteristická vlastnost	Zápis intervalu	Zakreslení na ose	Název
$a \leq x \leq b$	$\langle a, b \rangle$		uzavřený interval
$a < x \leq b$	$(a, b]$		polozavřený interval (nalevo otevřený,

			napravo uzavřený)
$a \leq x < b$	$\langle a, b \rangle$		polozavřený interval (napravo otevřený, nalevo uzavřený)
$a < x < b$	(a, b)		otevřený interval

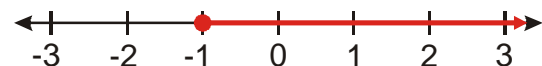
Pedagogická poznámka: Předchozí tabulku promítnu studentům, ale do sešitu ji nepřepisujeme. Stejně jako pozdější tabulku s neomezenými intervaly.

POZOR:

- Při zápisu intervalu musí být menší číslo vlevo: $(1,7)$ je dobře, $(7,1)$ není interval, ale prázdná množina $\emptyset = \{x \in R; 7 < x < 1\}$.
- Je rozdíl mezi $\langle 1, 2 \rangle$ a $\{1, 2\}$. $\{1, 2\}$ je množina, která obsahuje pouze dvě čísla: 1 a 2. Množina $\langle 1, 2 \rangle$ obsahuje nekonečně mnoho čísel a to 1, 2 a všechna čísla mezi nimi (např. 1,5; 1,9999999; 1,000001 atd.).

Pedagogická poznámka: Žáci často pletou různé druhy závorek. Snažím se to netolerovat, zejména tím, že si hrají na hlupáka, výsledky beru doslovně a nesnažím se domýšlet, co vlastně žáci zápisem chtěli sdělit.

Př. 2: Znázorni na číselné ose všechna čísla, která vyhovují podmínce $x \geq -1$.



Na ose vznikla polopřímka, množina je ohraničená pouze z jedné strany \Rightarrow nepíše se $\langle -1, \dots$, ale $\langle -1; \infty$.

Znak ∞ (plus nekonečno) znamená, že směrem doprava jdeme pořád dál $\Rightarrow \langle -1; \infty$ je neomezený interval.

Př. 3: Zapiš pomocí intervalu následující množiny.

a) $A = \{x \in Q; x \geq -2\}$

b) $B = \{x \in R; x \geq -2\}$

c) $C = \{x \in R; x \leq 1,01\}$

d) $D = \left\{x \in R; x > -\frac{2}{13}\right\}$

a) $A = \{x \in Q; x \geq -2\}$ - nejde, x je pouze z racionálních čísel \Rightarrow na ose pouze body, ne polopřímka

b) $B = \{x \in R; x \geq -2\} = \langle -2; \infty$

c) $C = \{x \in R; x \leq 1,01\} = (-\infty; 1,01]$

d) $D = \left\{x \in R; x > -\frac{2}{13}\right\} = \left(-\frac{2}{13}; \infty\right)$

Pedagogická poznámka: Povídáme si s těmi, kteří opět zapíší pomocí intervalu i množinu v bodě a). Kdo se neumí poučit s vlastních chyb.... Ostatní chválím.

Neomezené intervaly

Dva speciální znaky: $-\infty$ (minus nekonečno), $+\infty$ (plus nekonečno), u těchto znaků se vždy píše kulatá závorka (nekonečno, jak víme, není žádné konkrétní největší číslo).

Charakteristická vlastnost	Zápis intervalu	Zakreslení na ose	Název
$x \geq a$	$\langle a, +\infty$		zprava neomezené intervaly
$x > a$	$(a, +\infty$		
$x \leq a$	$(-\infty, a\rangle$		zleva neomezené intervaly
$x < a$	$(-\infty, a)$		

Speciální neomezený interval $(-\infty, \infty) = R$.

Intervaly jsou množiny \Rightarrow je možné určovat jejich průniky a sjednocení (má to význam při řešení rovnic a nerovnic).

Př. 4: Urči sjednocení a průnik následujících dvojic intervalů.

a) $\langle -2; 1\rangle, \langle -1; \infty$

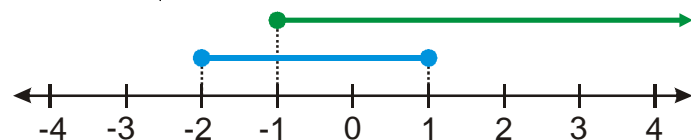
b) $\langle -2; 2\rangle, \langle 2; 4\rangle$

c) $\langle -2; 2\rangle, \langle 2; 4\rangle$

d) $(-2; 1), \langle 2; 4\rangle$

Ve všech případech si můžeme pomoci obrázkem číselné osy s nakreslenými intervaly.

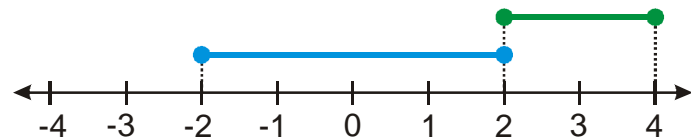
a) $\langle -2; 1\rangle, \langle -1; \infty$



$$\langle -2; 1\rangle \cup \langle -1; \infty) = \langle -2; \infty)$$

$$\langle -2; 1\rangle \cap \langle -1; \infty) = \langle -1; 1\rangle$$

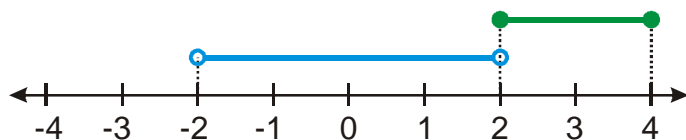
b) $\langle -2; 2\rangle, \langle 2; 4\rangle$



$$\langle -2; 2\rangle \cup \langle 2; 4\rangle = \langle -2; 4\rangle$$

$$\langle -2; 2\rangle \cap \langle 2; 4\rangle = \{2\}$$

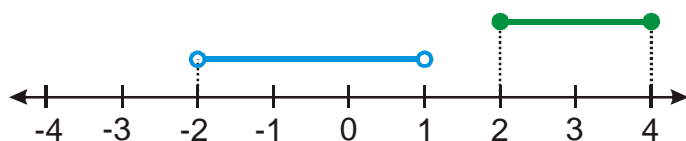
c) $(-2; 2), \langle 2; 4\rangle$



$$(-2; 2) \cup (2; 4) = (-2; 4)$$

$$(-2; 2) \cap (2; 4) = \emptyset$$

d) $(-2; 1), (2; 4)$



$$(-2; 1) \cup (2; 4) \text{ - nejde zapsat jako interval}$$

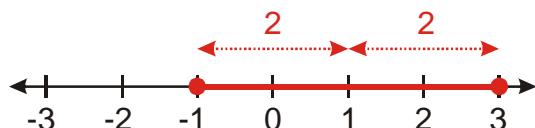
$$(-2; 1) \cap (2; 4) = \emptyset$$

Pedagogická poznámka: S příkladem nebývají problémy. Jenom se bavíme o zápisu průniku v bodě b) (někteří žáci píší $\langle 2 \rangle$) a hlavně o sjednocení v bodě d) (chybný výsledek $(-2; 4)$). Snažím se žákům vysvětlit, že v podstatě bezdůvodně porušili základní pravidlo pro intervaly – obsahují „všechno mezi nimi“. Pro jejich budoucí matematiku je to varující zlozvyk, protože ve chvílích nejistoty je potřeba se obracet k pravidlům a ne bezdůvodně opisovat předchozí výsledky.

Pedagogická poznámka: Slabší žáci stihnou v hodině předchozí příklad. Ti lepší pokračují v dalších příkladech. Kontrolu předchozího příkladu je třeba stihnout ještě v hodině.

Př. 5: Všechna reálná čísla, pro něž platí $|x-1| \leq 2$, zapiš pomocí intervalu.

Nakreslíme řešení na číselnou osu.



Řešením je tedy interval $\langle -1; 3 \rangle$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad by žáci měli umět, protože se probíral přibližně týden a půl před touto hodinou. Už tak krátká doba stačí k tomu, aby někteří červený rámeček na význam absolutní hodnoty z rozdílu dvou čísel zapomněli. Takže rozdávám mínusy a snažím se ukázat, jaký je rozdíl v obtížnosti příkladu pro ty, kteří si pamatují a kteří všechno zapomněli.

Př. 6: Všechna reálná čísla, pro něž platí $|x-a| \leq k$, zapiš pomocí intervalu. Při řešení nevyužívej číselnou osu. Vymysli, co nejvíce způsobů, jak zkontrolovat správnost výsledku.

$|x-a| \leq k \Rightarrow$ hledáme čísla vzdálená od a o k a méně. \Rightarrow

Má smysl pouze pro $k > 0$ (neexistuje záporná vzdálenost),
nejmenší hledané číslo $a-k$ (vzdálené od a o k směrem vlevo),
největší hledané číslo $a+k$ (vzdálené od a o k směrem vpravo),
 \Rightarrow interval $\langle a-k; a+k \rangle$.

Kontroly

1. Dosazení konkrétních čísel, pro které známe řešení.

$|x-1| \leq 2$ má řešení $\langle -1; 3 \rangle$

Platí $a=1$; $k=2$, dosadíme do řešení příkladu: $\langle a-k; a+k \rangle = \langle 1-2; 1+2 \rangle = \langle -1; 3 \rangle$.

2. Odvození jiným způsobem.

Řešíme příklad $|x-1| \leq 2 \Rightarrow$ hledáme čísla vzdálená od 1 o 2 a méně \Rightarrow interval

$\langle 1-2; 1+2 \rangle = \langle -1; 3 \rangle$ - ponecháme nevypočtené řešení $\langle 1-2; 1+2 \rangle$, je z něj vidět postup. Platí
 $a=1$; $k=2 \Rightarrow \langle 1-2; 1+2 \rangle = \langle a-k; a+k \rangle$.

Př. 7: Petáková:

strana 11/cvičení 19

strana 11/cvičení 20

Shrnutí: Interval je způsob, jak jednoduše zapsat podmnožinu reálných čísel, která je „ohraňována“ dvěma čísly (nebo nekonečnem) a obsahuje „všechno mezi nimi“.