1.3.8 Intervaly

Předpoklady: 010210, 010301, 010302, 010303

Problém

Množinu $A = \{x \in Z; 2 \le x \le 5\}$ zapíšeme snadno i výčtem: $A = \{2;3;4;5\}$.

Jak zapsat množinu $B = \{x \in R; 2 \le x \le 5\}$?

Jde o nekonečně mnoho čísel (2, 5 a všechno mezi nimi) $\Rightarrow$ existuje úspornější zápis:
$B = \{x \in R; 2 \le x \le 5\} = \langle 2;5 \rangle$

Zápis $\langle 2;5 \rangle$ znamená: Do zapsané množiny patří čísla 2, 5 a všechno mezi nimi $\Rightarrow$ význam číslic je jasný, závorky znamenají „a všechno mezi nimi“. Této množině říkáme **interval (uzavřený).**

Jak zapíšeme množinu $C = \left\{x \in R; 3 < x < \sqrt{40}\right\}$?

Opět nekonečně mnoho čísel (všechno mezi 3 a $\sqrt{40}$) $\Rightarrow$ podobné jako předtím, ale bez krajních bodů (3 ani $\sqrt{40}$ mezi čísla v množině nepatří) $\Rightarrow$ použijeme stejný systém, ale změníme závorky (aby bylo vidět, že krajní body do množiny nepatří):
$C = \left\{x \in R; 3 < x < \sqrt{40}\right\} = \left(3;\sqrt{40}\right)$. Této množině říkáme **interval (otevřený).**

Př. 1: Zapiš pomocí intervalu následující množiny.

a) $A = \{x \in R; -2 \le x < \pi\}$
b) $B = \left\{x \in Z; 1 \le x \le \sqrt{5}\right\}$
c) $C = \left\{x \in R; 0 \le x < \sqrt{7}\right\}$
d) $D = \left\{x \in R; |x| < \sqrt{2}\right\}$

a) $A = \{x \in R; -2 \le x < \pi\} = \langle -2;\pi)$

b) $B = \left\{x \in Z; 1 \le x \le \sqrt{5}\right\}$ - nejde, x je pouze z celých čísel $\Rightarrow$ na ose pouze body.

c) $C = \left\{x \in R; 0 \le x < \sqrt{7}\right\} = \left\langle 0;\sqrt{7}\right)$

d) $D = \left\{x \in R; |x| < \sqrt{2}\right\} = \left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$

Pedagogická poznámka: Jediné problémy jsou s bodem b), kde studenti často zapomínají, že zápis $\left\langle 1;\sqrt{5}\right\rangle$ znamená 1 a $\sqrt{5}$ a „všechna čísla mezi nimi“ a není možné jej použít na zápis podmnožiny celých čísel.

Přehled omezených intervalů.

Charakteristická vlastnost	Zápis intervalu	Zakreslení na ose	Název
$a \le x \le b$	$\langle a,b \rangle$		uzavřený interval
$a < x \le b$	$(a,b\rangle$		polozavřený interval (nalevo otevřený, napravo

			uzavřený)
$a \le x < b$	$\langle a,b)$		polozavřený interval (napravo otevřený, nalevo uzavřený)
$a < x < b$	(a,b)		otevřený interval

Pedagogická poznámka: Předchozí tabulku promítnu studentům, ale do sešitu ji nepřepisujeme. Stejně jako pozdější tabulku s neomezenými intervaly.

POZOR:

- Při zápisu intervalu musí být menší číslo vlevo: (1,7) je dobře, (7,1) není interval, ale prázdná množina $\emptyset = \{x \in R; 7 < x < 1\}$.
- Je rozdíl mezi $\langle 1,2 \rangle$ a $\{1,2\}$. $\{1,2\}$ je množina, která obsahuje pouze dvě čísla: 1 a 2. Množina $\langle 1,2 \rangle$ obsahuje nekonečně mnoho čísel a to 1, 2 a všechna čísla mezi nimi (např. 1,5; 1,9999999; 1,000001 atd.).

Pedagogická poznámka: Žáci často pletou různé druhy závorek. Snažím se to netolerovat, zejména tím, že si hraji na hlupáka, výsledky beru doslovně a nesnažím se domýšlet, co vlastně žáci zápisem chtěli sdělit.

Př. 2: Znázorni na číselné ose všechna čísla, která vyhovují podmínce $x \ge -1$.

Na ose vnikla polopřímka, množina je ohraničená pouze z jedné strany $\Rightarrow$ nepíše se $\langle -1\ldots$, ale $\langle -1;\infty)$.

Znak ∞ (plus nekonečno) znamená, že směrem doprava jdeme pořád dál $\Rightarrow$ $\langle -1;\infty)$ je neomezený interval.

Př. 3: Zapiš pomocí intervalu následující množiny.

a) $A = \{x \in Q; x \ge -2\}$ b) $B = \{x \in R; x \ge -2\}$

c) $C = \{x \in R; x \le 1{,}01\}$ d) $D = \left\{x \in R; x > -\frac{2}{13}\right\}$

a) $A = \{x \in Q; x \ge -2\}$ - nejde, x je pouze z racionálních čísel $\Rightarrow$ na ose pouze body, ne polopřímka

b) $B = \{x \in R; x \ge -2\} = \langle -2;\infty)$

c) $C = \{x \in R; x \le 1{,}01\} = (-\infty;1{,}01\rangle$

d) $D = \left\{x \in R; x > -\frac{2}{13}\right\} = \left(-\frac{2}{13};\infty\right)$

Pedagogická poznámka: Povídáme si s těmi, kteří opět zapíší pomocí intervalu i množinu v bodě a). Kdo se neumí poučit s vlastních chyb…. Ostatní chválím.

Neomezené intervaly
Dva speciální znaky: $-\infty$ (minus nekonečno), $(+)\infty$ (plus nekonečno), u těchto znaků se vždy píše kulatá závorka (nekonečno, jak víme, není žádné konkrétní největší číslo).

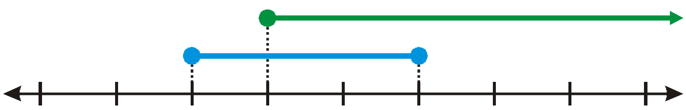
Charakteristická vlastnost	Zápis intervalu	Zakreslení na ose	Název
$x \geq a$	$\langle a,+\infty)$		zprava neomezené intervaly
$x > a$	$(a,+\infty)$		
$x \leq a$	$(-\infty,a\rangle$		zleva neomezené intervaly
$x < a$	$(-\infty,a)$		

Speciální neomezený interval $(-\infty,\infty) = R$.

Intervaly jsou množiny $\Rightarrow$ je možné určovat jejich průniky a sjednocení (má to význam při řešení rovnic a nerovnic).

Př. 4: Urči sjednocení a průnik následujících dvojic intervalů.
a) $\langle -2;1\rangle$, $\langle -1;\infty)$
b) $\langle -2;2\rangle$, $\langle 2;4\rangle$
c) $(-2;2)$, $\langle 2;4\rangle$
d) $(-2;1)$, $\langle 2;4\rangle$

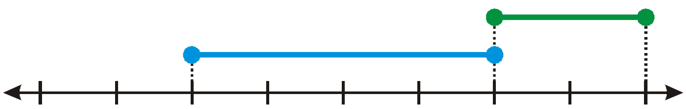
Ve všech případech si můžeme pomoci obrázkem číselné osy s nakreslenými intervaly.
a) $\langle -2;1\rangle$, $\langle -1;\infty)$



$\langle -2;1\rangle \cup \langle -1;\infty) = \langle -2;\infty)$

$\langle -2;1\rangle \cap \langle -1;\infty) = \langle -1;1\rangle$

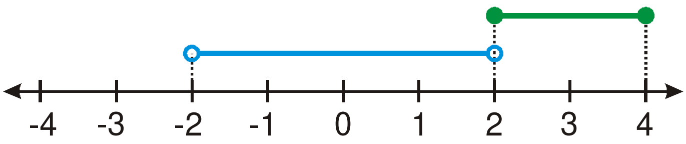
b) $\langle -2;2\rangle$, $\langle 2;4\rangle$



$\langle -2;2\rangle \cup \langle 2;4\rangle = \langle -2;4\rangle$

$\langle -2;2\rangle \cap \langle 2;4\rangle = \{2\}$

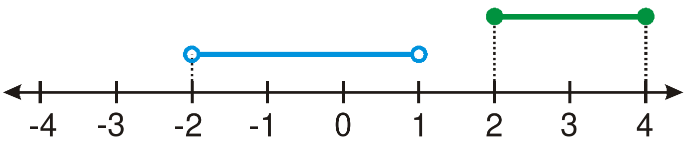
c) $(-2;2)$, $\langle 2;4\rangle$



$\left(-2;2\right)\cup\left\langle 2;4\right\rangle=\left(-2;4\right\rangle$

$\left(-2;2\right)\cap\left\langle 2;4\right\rangle=\varnothing$

d) $\left(-2;1\right)$, $\left\langle 2;4\right\rangle$



$\left(-2;1\right)\cup\left\langle 2;4\right\rangle$ - nejde zapsat jako interval

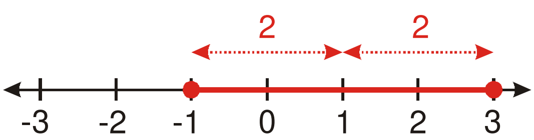
$\left(-2;1\right)\cap\left\langle 2;4\right\rangle=\varnothing$

Pedagogická poznámka: S příkladem nebývají problémy. Jenom se bavíme o zápisu průniku v bodě b) (někteří žáci píší $\left\langle 2\right\rangle$) a hlavně o sjednocení v bodě d) (chybný výsledek $\left(-2;4\right\rangle$). Snažím se žákům vysvětlit, že v podstatě bezdůvodně porušili základní pravidlo pro intervaly – obsahují „všechno mezi nimi". Pro jejich budoucí matematiku je to varující zlozvyk, protože ve chvílích nejistoty je potřeba se obracet k pravidlům a ne bezdůvodně opisovat předchozí výsledky.

Pedagogická poznámka: Slabší žáci stihnou v hodině předchozí příklad. Ti lepší pokračují v dalších příkladech. Kontrolu předchozího příkladu je třeba stihnout ještě v hodině.

Př. 5: Všechna reálná čísla, pro něž platí $\left|x-1\right|\leq 2$, zapiš pomocí intervalu.

Nakreslíme řešení na číselnou osu.



Řešením je tedy interval $\left\langle -1;3\right\rangle$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad by žáci měli umět, protože se probíral přibližně týden a půl před touto hodinou. Už tak krátká doba stačí k tomu, aby někteří červený rámeček na význam absolutní hodnoty z rozdílu dvou čísel zapomněli. Takže rozdávám mínusy a snažím se ukázat, jaký je rozdíl v obtížnosti příkladu pro ty, kteří si pamatují a kteří všechno zapomněli.

Př. 6: Všechna reálná čísla, pro něž platí $|x-a|\le k$, zapiš pomocí intervalu. Při řešení nevyužívej číselnou osu. Vymysli, co nejvíce způsobů, jak zkontrolovat správnost výsledku.

$|x-a|\le k \Rightarrow$ hledáme čísla vzdálená od a o k a méně. $\Rightarrow$
Má smysl pouze pro $k>0$ (neexistuje záporná vzdálenost),
nejmenší hledané číslo $a-k$ (vzdálené od a o k směrem vlevo),
největší hledané číslo $a+k$ (vzdálené od a o k směrem vpravo),
$\Rightarrow$ interval $\langle a-k;a+k\rangle$.

Kontroly
1. Dosazení konkrétních čísel, pro která známe řešení.
$|x-1|\le 2$ má řešení $\langle -1;3\rangle$
Platí $a=1$; $k=2$, dosadíme do řešení příkladu: $\langle a-k;a+k\rangle=\langle 1-2;1+2\rangle=\langle -1;3\rangle$.

2. Odvození jiným způsobem.
Řešíme příklad $|x-1|\le 2 \Rightarrow$ hledáme čísla vzdálená od 1 o 2 a méně $\Rightarrow$ interval $\langle 1-2;1+2\rangle=\langle -1;3\rangle$ - ponecháme nevypočtené řešení $\langle 1-2;1+2\rangle$, je z něj vidět postup. Platí $a=1$; $k=2 \Rightarrow \langle 1-2;1+2\rangle=\langle a-k;a+k\rangle$.

Př. 7: Petáková:
strana 11/cvičení 19
strana 11/cvičení 20

Shrnutí: Interval je způsob, jak jednoduše zapsat podmnožinu reálných čísel, která je „ohraničena“ dvěma čísly (nebo nekonečnem) a obsahuje „všechno mezi nimi“.