

1.3.8 Množiny - shrnutí

Předpoklady: 010307

Pedagogická poznámka: Kapitola o množinách spolu s následujícími dvěma kapitolami (výroky a dělitelnost) slouží k nácviku učení. Součástí učení je také příprava na písemky (snažím se, aby se psaly na logicky uzavřené celky přibližně jednou za dva týdny nebo trochu řídkěji), kde je většinou nutné lámat stereotypy stejně jako v jiných oblastech.

Typická česká písemka "na pokrytí" (známka v podstatě odpovídá poměru plochy poznámek v sešitě a plochy poznámek v písemce bez ohledu na logickou ucelenost a důležitost nebo aplikaci faktů) vede k tomu, že žáci se učí všechno nazpaměť (včetně příkladů) a často se ani nesnaží logicky interpretovat. Následující hodina (a její ekvivalenty v dalších kapitolách) proto slouží k nácviku přípravy na písemku.

Pokud vidíme smysl výuky v probrání maximálního možného počtu poznatků, je samozřejmě zbytečná (protože nic nového se žáci nedozvědí), podle mých zkušeností je jednou z hodin, které rozhodují o postoji žáků k matematice.

"Naučit se něco" má jen málo společného s tím "zapamatovat si něco nazpaměť". Jak se naučit množiny?

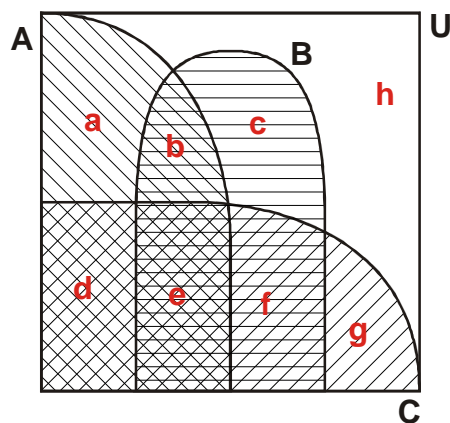
V první fázi si musíme projít probranou látku a soustředit se na tři věci:

- důležité definice, značení, pravidla, která potřebujeme k tomu, abychom mohli vůbec něco řešit nebo počítat,
- zádrhele, chyby, které jsme dělali, když se látka probírala, místa, kde jsme měli tendenci pokračovat špatným směrem,
- dobré rady, postupy, které nám ulehčovaly práci, snižovaly pravděpodobnost, že se spleteme.

Shrnutí množin

Důležité znalosti

- Množinu zadáváme výčtem nebo charakteristickou vlastností.
- Rovnost množiny (každý prvek každé množiny je prvkem i druhé množiny).
- Doplněk množiny A v množině B tvoří prvky množiny B , které nejsou v A .
- Průnik množin A, B , tvoří prvky, které náležejí oběma množinám \Rightarrow typické "méně prvků" $\Rightarrow \cap$.
- Sjednocení množin A, B , tvoří prvky, které náležejí alespoň jedné z nich \Rightarrow typické "více prvků" $\Rightarrow \cup$.
- Rozdíl množin $A \setminus B$ je množina prvků množiny A , které nepatří do množiny B .



- Vennův diagram
- Slovní úlohy ve třech fázích (množiny, sestavení rovnic, vyřešení soustavy a zakreslení do diagramu).
- Intervaly jsou speciální podmnožiny R .
- $(a; b)$ a do intervalu nepatří, b patří.

Zádrhele

- Prázdná množina je podmnožina každé množiny.
- Mezi ty, kteří vlastní auto nebo chatu, patří i ti, kteří mají auto a chatu najednou.

Dobré rady

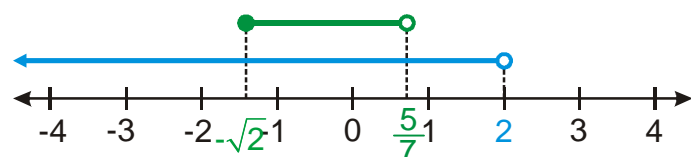
- Překontrolovat zpětně výčet nebo charakteristickou vlastnost.
- U složitějších diagramů postupně a šrafovat.
- Rovnice psát ihned a vedle vět, nejdříve napsat množství a pak si rozmyslet, které je větší.
- Nakreslit intervaly.

Pedagogická poznámka: Uvedené shrnutí množin je mým pohledem, ve kterém částečně zohledňuji své zkušenosti s žáky (jejich chyby). Shrnutí by mělo být individuální, pokud možno stručné, nemělo by obsahovat věci, které jsou zcela jasné. Největší smysl má, pokud ho žáci sestavují samostatně doma, ve škole se jenom rychle sestaví "společný kompromis" (s tím, že pro každého je důležitější vlastní výtvar než stav na tabuli). Pokud chcete, aby ho žáci doopravdy udělali, nezbyvá než ho dát povinně a nesplnění úkolu trestat.

Ve druhé fázi se pokusíme shrnutí zapamatovat (ne nazpaměť, ale podle smyslu).

Ve třetí fázi potom testujeme své znalosti řešením příkladů. Pokud někde neuspějeme, musíme najít místo, kde se stala chyba (nepamatoval jsem si pravidlo, přehlédl jsem se, špatně jsem si to napsal, ...), a chybu vyřešit.

Př. 1: Urči průnik a sjednocení intervalů $(-\infty; 2)$ a $\left(-\sqrt{2}; \frac{5}{7}\right)$.



$$(-\infty; 2) \cup \left\langle -\sqrt{2}; \frac{5}{7} \right\rangle = (-\infty; 2)$$

$$(-\infty; 2) \cap \left\langle -\sqrt{2}; \frac{5}{7} \right\rangle = \left\langle -\sqrt{2}; \frac{5}{7} \right\rangle$$

Př. 2: Urči výpisem doplněk množiny kluků ve třídě v množině žáků sedících v oddělení u okna.

Doplněk množiny A v množině B tvoří prvky množiny B , které nejsou v $A \Rightarrow$ hledáme žáky, kteří sedí u okna a nejsou kluci \Rightarrow hledáme holky, které sedí u okna.

Sumi, Sylva, Katka, Eva a Helena.

Př. 3: Vypiš všechny podmnožiny množiny $A = \{0; \pi; \sqrt{7}\}$.

$$\{0; \pi; \sqrt{7}\}$$

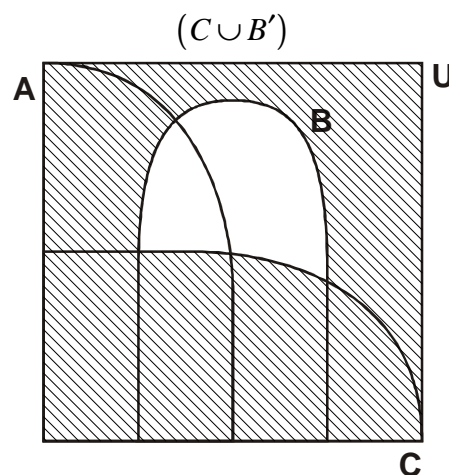
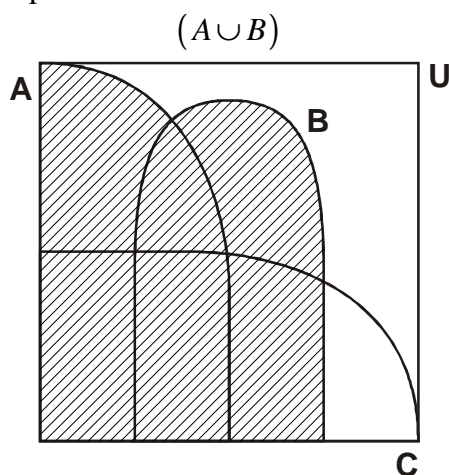
$$\{0; \pi\}, \{0; \sqrt{7}\}, \{\pi; \sqrt{7}\}$$

$$\{0\}, \{\pi\}, \{\sqrt{7}\}$$

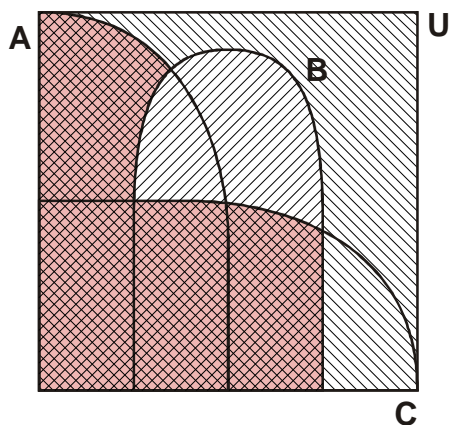
$$\emptyset$$

Př. 4: Najdi pomocí Vennova diagramu jiné vyjádření množiny $(A \cup B) \cap (C \cup B')$.

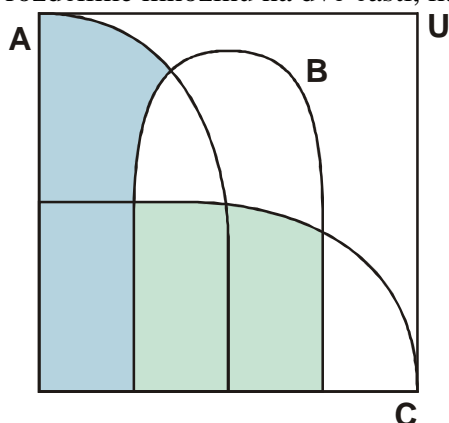
Postupně kreslíme.



$$(A \cup B) \cap (C \cup B')$$

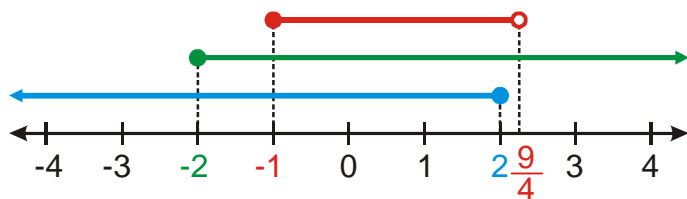


Získanou množinu můžeme zapsat různými způsoby, například pomocí sjednocení \Rightarrow rozdělíme množinu na dvě části, které už zapíšeme.



Jde o množinu $(A \setminus B) \cup (B \cap C)$.

Př. 5: Urči průnik a sjednocení intervalů $(-2; \infty)$, $\langle -1; \frac{9}{4} \rangle$ a $(-\infty; 2)$.



$$(-2; \infty) \cup \langle -1; \frac{9}{4} \rangle \cup (-\infty; 2) = \mathbb{R}$$

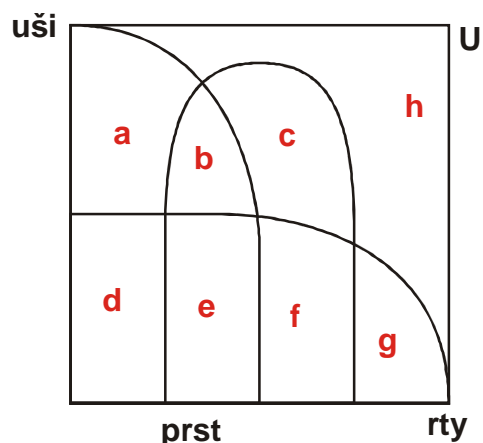
$$(-2; \infty) \cap \langle -1; \frac{9}{4} \rangle \cap (-\infty; 2) = \langle -1; 2 \rangle$$

Př. 6: U příslušníků malého slovanského primitivního kmene Bošola se vyskytují tři zajímavé anatomické znaky: špičaté uši, šestý prst na pravé ruce a zelené rty. Zapiš pomocí rovnic a písmenek z Vennova diagramu následující věty:

- špičaté uši jsou u Bošolů třikrát častější než šestý prst,
- počet Bošolů, kteří mají pouze šestý pravý prst, je o deset menší než počet těch, kteří mají pouze zelené rty,
- počet Bošolů se zelenými rty nebo šestým prstem je o 3 větší než počet Bošolů se

špičatýma ušima,

d) pouze desetina Bošolů nemá žádný speciální anatomický znak.



a) špičaté uši jsou u Bošolů třikrát častější než šestý prst

$$a + b + d + e = 3(b + c + e + f)$$

b) počet Bošolů, kteří mají pouze šestý pravý prst, je o deset menší než počet těch, kteří mají pouze zelené rty

$$c + 10 = g$$

c) počet Bošolů se zelenými rty nebo šestým prstem je o 3 větší než počet Bošolů se špičatýma ušima

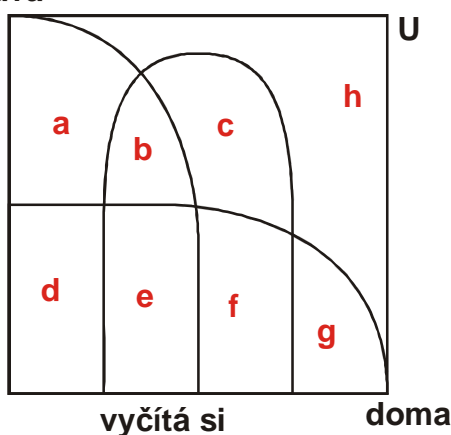
$$b + c + d + e + f + g = a + b + d + e + 3$$

d) pouze desetina Bošolů nemá žádný speciální anatomický znak.

$$10h = a + b + c + d + e + f + g + h$$

Př. 7: Učitel matematiky v 1. ročníku právě rozdál opravenou písemku. Je to masakr. Z 24 studentů, kteří písemku psali, 12 v duchu nadává na učitele kvůli příliš těžkému zadání, 13 studentů si vyčítá, že se na to před písemkou nepodívali. 8 studentů kromě vyčítání ještě přemýšlí o tom, jak známku doma vysvětlí rodičům. Studentů, kteří si vyčítají zanedbání přípravy a přitom nadávají na učitele, je 6. Ti, kteří vidí chybu jen v učiteli a přemýšlí, co budou říkat doma, jsou dva. 18 studentů si vyčítá lenost nebo přemýšlí o výmluvách. Těch, kteří se zabývají pouze tím, jak známku vysvětlí doma, je o jednoho méně než těch, kteří vidí pouze chybu v sobě a situace doma je netrápí. Kolik studentů je spokojeno se svou známkou? Kolik jich jenom nadává na učitele? Kolik studentů reaguje na známku právě dvěma způsoby?

nadává



Z 24 studentů, kteří písemku psali $\Rightarrow a + b + c + d + e + f + g + h = 24$.

12 v duchu nadává na učitele $\Rightarrow a + b + d + e = 12$.

13 studentů si vyčítá, že se na to nepodívali $\Rightarrow b + c + e + f = 13$.

8 studentů kromě vyčítání ještě přemýšlí o tom, jak známku doma vysvětlí rodičům $\Rightarrow e + f = 8$.

Studentů, kteří si vyčítají zanedbání přípravy a při tom nadávají na učitele, je 6 $\Rightarrow b + e = 6$.

Ti, kteří vidí chybu jen v učiteli a přemýšlí, co budou říkat doma, jsou dva $\Rightarrow d = 2$.

18 studentů si vyčítá lenost nebo přemýšlí o výmluvách $\Rightarrow b + c + d + e + f + g = 18$.

Těch, kteří se zabývají pouze tím, jak známku vysvětlí doma, je o jednoho méně než těch, kteří vidí pouze chybu v sobě a situace doma je netrápí $\Rightarrow g + 1 = c$.

Soustava rovnic.

$$a + b + c + d + e + f + g + h = 24$$

$$a + b + d + e = 12$$

$$b + c + e + f = 13$$

$$e + f = 8$$

$$b + e = 6$$

$$d = 2$$

$$b + c + d + e + f + g = 18$$

$$g + 1 = c$$

Zjednodušování rovnic.

Dosadíme sedmou rovnicí: $a + 18 + h = 24 \Rightarrow a + h = 6$.

Dosadíme pátou rovnicí: $a + d + 6 = 12 \Rightarrow a + d = 6$.

Dosadíme čtvrtou rovnici: $b+c+8=13 \Rightarrow b+c=5$.

$$e+f=8$$

$$b+e=6$$

$$d=2$$

Dosadíme třetí rovnici: $d+g+13=18 \Rightarrow d+g=5$.

$$g+1=c$$

Do sedmé rovnice dosadíme $d=2$: $2+g=5 \Rightarrow g=3$.

Do osmé rovnice dosadíme $g=3$: $3+1=c \Rightarrow c=4$.

Do čtvrté rovnice dosadíme $c=4$: $b+4=5 \Rightarrow b=1$.

Do šesté rovnice dosadíme $b=1$: $1+e=6 \Rightarrow e=5$.

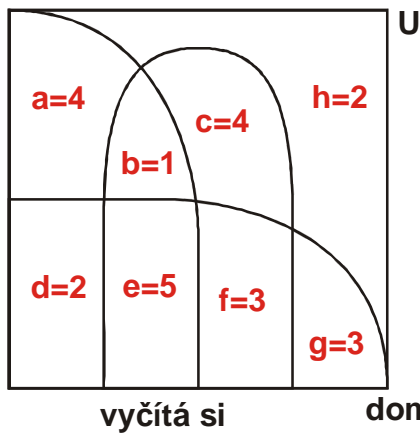
Do páté rovnice dosadíme $e=5$: $5+f=8 \Rightarrow f=3$.

Do třetí rovnice dosadíme $d=2$: $a+2=6 \Rightarrow a=4$.

Do druhé rovnice dosadíme $a=4$: $4+h=6 \Rightarrow h=2$.

Doplňme hodnoty do diagramu,

nadává



Se svou známkou jsou spokojení 2 studenti.

4 studenti jenom nadávají na učitele.

Právě dvěma způsoby reaguje 6 studentů.

Shrnutí: Učit se všechno nazpaměť je nesmysl.