

1.4.2 Negace jednoduchých výroků

Předpoklady: 010401

Pedagogická poznámka: Většina poznámek v této hodině pochází až z pátého průchodu hodinou (který byl ale první ve třídě, kterou jsem měl už od primy). Zdá se, že schopnost pitvat se ve věcech a stavět se na odpor učiteli se opravdu dá trochu nacvičit. Naopak třídy, které máte teprve dva měsíce, zřejmě žádný odpor ještě nekladou.

Př. 1: Na co je nutné dávat pozor při vytváření negací bez záporu? Vytvoř negaci výroku v: Číslo -2 je záporné.

Negace musí obsahovat všechny možnosti, „nezahrnuté“ v původním výroku.

Chybná negace: Číslo -2 je kladné.

Pozor: Kromě kladných a záporných čísel existuje také nula a tu musíme zahrnout.

⇒ Správná negace: Číslo -2 je kladné nebo nula.

Můžeme si situaci znázornit. Máme tři skupiny čísel :

záporná čísla nula kladná čísla

Původní výrok: „Číslo -2 je záporné.“ ⇒ patří do modré skupiny.

Negace: „Číslo -2 není záporné.“ ⇒ nepatří do modré skupiny ⇒ patří do zelené nebo červené ⇒ „Číslo -2 je kladné nebo nula.“

Pedagogická poznámka: Studentům připadá často zcela absurdní věta „Číslo -2 je kladné nebo nula“. Je dobré jim zdůraznit, že mají pravdu, výrok je (nesmyslný) nepravdivý, ale to je přesně to, co jsme chtěli, z pravdivého výroku získat výrok nepravdivý.

Př. 2: Najdi negace následujících výroků (takové, aby neobsahovaly zápor).

- Trojúhelník ABC je ostroúhlý.
- Daný trojúhelník ABC nemá všechny strany stejné.
- Přímky p, q mají společný právě jeden bod.
- Kořen rovnice $x - 3 = 3$ je záporné číslo.
- $\sqrt{2} + \pi > 4$

v	$\neg v$
Daný trojúhelník ABC je ostroúhlý.	Daný trojúhelník ABC je tupoúhlý nebo pravoúhlý.
Daný trojúhelník ABC nemá všechny strany stejné.	Daný trojúhelník ABC je rovnostranný.
Přímky p, q mají společný právě jeden bod.	Přímky p, q mají alespoň dva nebo žádný společný bod.
Kořen rovnice $x - 3 = 3$ je záporné číslo.	Kořen rovnice $x - 3 = 3$ je buď kladné nebo 0.
$\sqrt{2} + \pi > 4$	$\sqrt{2} + \pi \leq 4$

Pedagogická poznámka: Objevují se názory, že bod e) nepředstavuje výrok (podobnost s formulí $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ z minulé hodiny). V tomto případě ale formule obsahuje pouze konkrétní čísla, která nevyžadují další specifikace a tudíž jde o výrok.

V bodu d) část žáků (ale setkal jsem se s tím pouze ve třídě zmiňované v úvodní poznámce) píše negaci „Přímky p, q mají nekonečno nebo žádný společný bod“, která vychází z toho, že u dvou přímek není více možností než 0, 1 nebo nekonečně mnoho společných bodů. Sám teď nevím, jestli bych tuto variantu neměl zařadit jako správnou odpověď. V každém případě autoři tohoto řešení zaslouží spíše pochválit.

Výroky o počtu

Př. 3: Student musí v průběhu jednoho školního pololetí získat z každého předmětu alespoň tři známky.

- Urči všechny počty známek z jednoho předmětu, které vyhovují této podmínce.
- Urči všechny počty známek z jednoho předmětu, které nevyhovují této podmínce.

Alespoň tři \Rightarrow student může mít 3, 4, 5
 \Rightarrow 3 nebo víc známek

Má mít alespoň tři \Rightarrow student nesmí mít 0, 1, 2 \Rightarrow student má smůlu, pokud má nejvýše 2 známky.

Pedagogická poznámka: Výsledky píšu heslovitě do tabulky, která je naznačena v řešeních.

Př. 4: Množina M má **alespoň k prvků**.

- Urči, jakým číslem může být roven počet jejich prvků.
- Urči, jakým číslem nesmí být roven počet jejich prvků.

Alespoň k prvků \Rightarrow může mít $k, k+1, \dots \Rightarrow$
 k nebo více prvků.

Alespoň k prvků \Rightarrow student nesmí mít 0, 1, 2, ..., $k-1 \Rightarrow$ množina má nejvýše $k-1$ prvků.

Pedagogická poznámka: Správně může být i mnoho jiných vyjádření, jako například: „množina má méně než k prvků“

Př. 5: Student smí v průběhu jednoho školního pololetí zameškat nejvýše tři písemky.

- Urči všechny počty zameškaných písemek, které vyhovují této podmínce.
- Urči všechny počty zameškaných písemek, které nevyhovují této podmínce.

Nejvýše tři \Rightarrow student může zameškat 3, 2, 1 nebo 0 \Rightarrow 3 nebo méně písemek.

Smí zameškat nejvýše tři \Rightarrow nesmí zameškat 4, 5, 6, ... \Rightarrow 4 nebo víc písemek.

Př. 6: Množina N má **nejvýše k prvků**.

- Urči, jakým číslem může být roven počet jejich prvků.
- Urči, jakým číslem nesmí být roven počet jejich prvků.

Má nejvýše k prvků \Rightarrow může mít $0, 1, \dots, k$
 $\Rightarrow k$ nebo méně prvků.

Má nejvýše k prvků \Rightarrow množina nesmí mít $k+1, k+2, k+3, \dots \Rightarrow$ množina nesmí mít $k+1$ a více prvků.

Tím jsme se vlastně naučili negovat výroky o počtu.

Př. 7: Dopln tabulku negací výroků o počtu (použij taková slova, aby byla matematicky co nejkrásnější).

v	$\neg v$
Množina M má alespoň k prvků.	
Množina M má nejvýše k prvků.	

v	$\neg v$
Množina M má alespoň k prvků.	Množina M má nejvýše $k-1$ prvků.
Množina M má nejvýše k prvků.	Množina M má alespoň $k+1$ prvků.

Pedagogická poznámka: Opět studentům říkám, že lepší, než si pamatovat tabulku negací výroků o počtu, je pamatovat si, že negace snadno odvodí pomocí přemýšlení o konkrétním příkladě.

Pedagogická poznámka: Vyplňování tabulky opět přineslo zajímavý rozdíl u děle učených žáků. Na rozdíl od těch čerstvě učených nepřejmou při doplňování tabulky termíny uvedené v řešení předchozích příkladů na tabuli, proto je v zadání přidaná poznámka v závorce. A při kontrole se bavíme o tom, že právě uvedená skutečnost, že negace jednoho typu výroků má tvar shodný s druhým typem (tedy určitý druh symetrie a propojenosti) je příkladem toho, co se označuje jako matematická krása (a co se vyplatí hledat, protože to z nějakého důvodu je opravdu na mnoha místech její součástí).

Vytvoříme negaci výroku: „Konvexní šestiúhelník má 9 úhlopříček.“

Původní výrok: „má 9 úhlopříček.“ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 ...

Negace: „nemá 9 úhlopříček.“ \Rightarrow musíme popsat všechna nečervená čísla \Rightarrow

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 ... \Rightarrow .. má nejvýše 8 nebo nejméně 10 \Rightarrow

Konvexní šestiúhelník má nejvýše 8 nebo nejméně 10 úhlopříček.“

Př. 8: Vytvoř negace následujících výroků bez použití záporu.

- a) Rovnice $x^2 - x - 3 = 0$ má alespoň dvě řešení.
- b) Číslo 12 má nejvýše 5 dělitelů.
- c) Krychle má nejvýše 8 vrcholů.
- d) Existují právě 4 prvočísla menší než 10.
- e) n bodů rozdělí přímku na nejvýše $n + 1$ částí.
- f) Množina M má právě $n - 1$ prvků.

v	$\neg v$
Rovnice $x^2 - x - 3 = 0$ má alespoň dvě řešení.	Rovnice $x^2 - x - 3 = 0$ má nejvýše jedno řešení.
Číslo 12 má nejvýše 5 dělitelů.	Číslo 12 má alespoň 6 dělitelů.
Krychle má nejvýše 8 vrcholů.	Krychle má alespoň 9 vrcholů.
Existují právě 4 prvočísla menší než 10.	Existují právě nejvýše 3 nebo alespoň 5 prvočísel menších než 10.
n bodů rozdělí přímku na nejvýše $n + 1$ částí.	n bodů rozdělí přímku na alespoň $n + 2$ částí.
Množina M má právě $n - 1$ prvků.	Množina M má nejvýše $n - 2$ prvků nebo alespoň n prvků.

Pedagogická poznámka: Kvůli spojce nebo v bodě d) se rozhořela diskuse s jednou žákyní, která se špatně smířovala se skutečností, že mezi prvky vyhovující specifikaci v množině A nebo v množině B patří i prvky náležející do obou množin. Interpretovala negaci jako nesmysl kvůli tomu, že přece není možné, aby prvočísel menších než deset bylo zároveň nejvýše 3 a alespoň 5. Jde o ukázkou obrácené implikace, z toho, že mezi prvky vyhovující A nebo B patří i prvky vyhovující A a B , vůbec nevyplývá, že pokud některý prvek patří do A nebo B , musí být zrovna v té části A a B můžeme samozřejmě v části pouze A nebo pouze B a část A a B může být úplně prázdná (jako je zcela určitě prázdná v tomto případě, protože chcít, aby prvočísel bylo nejvýše 3 a zároveň nejméně 5 opravdu smysl nedává). Při vysvětlování je to samozřejmě lepší kreslit.

Př. 9: Petáková:
 strana 10/cvičení 1
 strana 10/cvičení 2
 strana 11/cvičení 12
 strana 11/cvičení 15 a) b) c)

Shrnutí: Do negace výroku musíme zahrnout všechny možnosti, které neobsahuje původní výrok.