1.4.2 Negace jednoduchých výroků

Předpoklady: 010401

Pedagogická poznámka: Většina poznámek v této hodině pochází až z pátého průchodu hodinou (který byl ale první ve třídě, kterou jsem měl už od primy). Zdá se, že schopnost pitvat se ve věcech a stavět se na odpor učiteli se opravdu dá trochu nacvičit. Naopak třídy, které máte teprve dva měsíce, zřejmě žádný odpor ještě nekladou.

Př. 1: Na co nutné dávat pozor při vytváření negací bez záporu? Vytvoř negaci výroku *v*: Číslo –2 je záporné.

Negace musí obsahovat všechny možnosti, „nezahrnuté" v původním výroku.
Chybná negace: Číslo –2 je kladné.
Pozor: Kromě kladných a záporných čísel, existuje také nule a tu musíme zahrnout.
$\Rightarrow$ Správná negace: Číslo –2 je kladné nebo nula.

Můžeme si situaci znázornit. Máme tři skupiny čísel :
záporná čísla nula kladná čísla
Původní výrok: „Číslo –2 je záporné." $\Rightarrow$ patří do modré skupiny.
Negace: „Číslo –2 není záporné." $\Rightarrow$ nepatří do modré skupiny $\Rightarrow$ patří do zelené nebo červené $\Rightarrow$ „Číslo –2 je kladné nebo nula."

Pedagogická poznámka: Studentům připadá často zcela absurdní věta „Číslo –2 je kladné nebo nula". Je dobré jim zdůraznit, že mají pravdu, výrok je (nesmyslný) nepravdivý, ale z pohledu logiky je úplně jedno, zda je výrok pravdivý nebo ne.

Př. 2: Najdi negace následujících výroků (takové, aby neobsahovaly zápor).
a) Trojúhelník *ABC* je ostroúhlý.
b) Daný trojúhelník *ABC* nemá všechny strany stejné.
c) Přímky *p*, *q* mají společný právě jeden bod.
d) Kořen rovnice $x-3=3$ je záporné číslo.
e) $\sqrt{2}+\pi>4$

v	$\neg v$
Daný trojúhelník *ABC* je ostroúhlý.	Daný trojúhelník *ABC* je tupoúhlý nebo pravoúhlý.
Daný trojúhelník *ABC* nemá všechny strany stejné.	Daný trojúhelník *ABC* je rovnostranný.
Přímky *p*, *q* mají společný právě jeden bod.	Přímky *p*, *q* mají alespoň dva nebo žádný společný bod.
Kořen rovnice $x-3=3$ je záporné číslo.	Kořen rovnice $x-3=3$ je buď kladné nebo 0.
$\sqrt{2}+\pi>4$	$\sqrt{2}+\pi\le 4$

Pedagogická poznámka: Objevují se názory, že bod e) nepředstavuje výrok (podobnost s formulí $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ z minulé hodiny). V tomto případě, ale formule obsahuje pouze konkrétní čísla, která nevyžadují další specifikace a tudíž jde o výrok.
V bodu d) část žáků (ale setkal jsem se s tím pouze ve třídě zmiňované v úvodní poznámce) píše negaci „Přímky *p*, *q* mají nekonečno nebo žádný společný bod“, která vychází z toho, že u dvou přímek není více možností než 0, 1 nebo nekonečně mnoho společných bodů. Sám teď nevím, jestli bych tuto variantu neměl zařadit jako správnou odpověď. V každém případě autoři tohoto řešení zaslouží spíše pochválit.

Výroky o počtu

Př. 3: Student musí v průběhu jednoho školního pololetí získat z každého předmětu alespoň tři známky.
a) Urči všechny počty známek z jednoho předmětu, které vyhovují této podmínce.
b) Urči všechny počty známek z jednoho předmětu, které nevyhovují této podmínce.

Alespoň tři $\Rightarrow$ student může mít 3, 4, 5 ….
$\Rightarrow$ 3 nebo víc známek

Má mít alespoň tři $\Rightarrow$ student nesmí mít 0, 1, 2 …. $\Rightarrow$ student má smůlu, pokud má nejvýše 2 známky.

Pedagogická poznámka: Výsledky píšu heslovitě do tabulky, která je naznačena v řešeních.

Př. 4: Množina *M* má **alespoň *k* prvků**.
a) Urči, jakým číslům může být roven počet jejich prvků.
b) Urči, jakým číslům nesmí být roven počet jejich prvků.

Alespoň *k* prvků $\Rightarrow$ může mít *k*, *k*+1, ... $\Rightarrow$ *k* nebo více prvků.

Alespoň *k* prvků $\Rightarrow$ student nesmí mít 0, 1, 2, …, *k*-1 $\Rightarrow$ množina má nejvýše *k*-1 prvků.

Pedagogická poznámka: Správně může být i mnoho jiných vyjádření, jako například: „množina má méně než *k* prvků“….

Př. 5: Student smí v průběhu jednoho školního pololetí zameškat nejvýše tři písemky.
a) Urči všechny počty zameškaných písemek, které vyhovují této podmínce.
b) Urči všechny počty zameškaných písemek, které nevyhovují této podmínce.

Nejvýše tři $\Rightarrow$ student může zameškat 3, 2, 1 nebo 0 $\Rightarrow$ 3 nebo míň písemek.

Smí zameškat nejvýše tři $\Rightarrow$ nesmí zameškat 4, 5, 6, … $\Rightarrow$ 4 nebo víc písemek.

Př. 6: Množina *N* má **nejvýše *k* prvků.**
a) Urči, jakým číslům může být roven počet jejich prvků.
b) Urči, jakým číslům nesmí být roven počet jejich prvků.

Má nejvýše *k* prvků $\Rightarrow$ může mít 0, 1, …, *k* $\Rightarrow$ *k* nebo méně prvků.

Má nejvýše *k* prvků $\Rightarrow$ množina nesmí mít $k+1$, $k+2$, $k+3$, $\dots$ $\Rightarrow$ množina nesmí mít $k+1$ a více prvků.

Tím jsme se vlastně naučili negovat výroky o počtu.

Př. 7: Doplň tabulku negací výroků o počtu (použij taková slova, aby byla matematicky co nejkrásnější).

v	¬*v*
Množina *M* má alespoň *k* prvků.	
Množina *M* má nejvýše *k* prvků.	

v	¬*v*
Množina *M* má alespoň *k* prvků.	Množina *M* má nejvýše *k*-1 prvků.
Množina *M* má nejvýše *k* prvků.	Množina *M* má alespoň *k*+1 prvků.

Pedagogická poznámka: Opět studentům říkám, že lepší, než si pamatovat tabulku negací výroků o počtu, je pamatovat si, že negace snadno odvodí pomocí přemýšlení o konkrétním příkladě.

Pedagogická poznámka: Vyplňování tabulky opět přineslo zajímavý rozdíl u déle učených žáků. Na rozdíl od těch čerstvě učených nepřejmou při doplňování tabulky termíny uvedené v řešení předchozích příkladů na tabuli, proto se je v zadání přidaná poznámka v závorce. A při kontrole se bavíme o tom, že právě uvedená skutečnost, že negace jednoho typu výroků má tvar shodný s druhým typem (tedy určitý druh symetrie a propojenosti) je příkladem toho, co se označuje jako matematická krása (a co se vyplatí hledat, protože to z nějakého původu je opravdu její součástí na mnoha místech).

Vytvoříme negaci výroku: „Konvexní šestiúhelník má 9 úhlopříček."
Původní výrok:„ má 9 úhlopříček." 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 ...
Negace: „nemá 9 úhlopříček." $\Rightarrow$ musíme popsat všechna nečervená čísla $\Rightarrow$
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 ... $\Rightarrow$ .. má nejvýše 8 nebo nejméně 10 $\Rightarrow$
Konvexní šestiúhelník má nejvýše 8 nebo nejméně 10 úhlopříček."

Př. 8: Vytvoř negace následujících výroků bez použití záporu.

a) Rovnice $x^2 - x - 3 = 0$ má alespoň dvě řešení.
b) Číslo 12 má nejvýše 5 dělitelů.
c) Krychle má nejvýše 8 vrcholů.
d) Existují právě 4 prvočísla menší než 10.
e) *n* bodů rozdělí přímku na nejvýše $n+1$ částí.
f) Množina *M* má právě $n-1$ prvků.

v	$\neg v$
Rovnice $x^2 - x - 3 = 0$ má alespoň dvě řešení.	Rovnice $x^2 - x - 3 = 0$ má nejvýše jedno řešení.
Číslo 12 má nejvýše 5 dělitelů.	Číslo 12 má alespoň 6 dělitelů.
Krychle má nejvýše 8 vrcholů.	Krychle má alespoň 9 vrcholů.
Existují právě 4 prvočísla menší než 10.	Existují právě nejvýše 3 nebo alespoň 5 prvočísel menších než 10.
n bodů rozdělí přímku na nejvýše $n+1$ částí.	*n* bodů rozdělí přímku na alespoň $n+2$ částí.
Množina *M* má právě $n-1$ prvků.	Množina *M* má nejvýše $n-2$ prvků nebo alespoň *n* prvků.

Pedagogická poznámka: Kvůli spojce nebo v bodě d) se rozhořela diskuse s jednou žákyní, která se špatně smiřovala se skutečností, že mezi prvky vyhovující specifikaci v množině *A* nebo v množině *B* patří i prvky náležející do obou množin. Interpretovala negaci jako nesmysl kvůli tomu, že přece není možné, aby prvočísel menších než deset bylo zároveň nejvýše 3 a alespoň 5. Jde o ukázku obrácené implikace, z toho, že mezi prvky vyhovující *A* nebo *B* patří i prvky vyhovující *A* a *B*, vůbec nevyplývá, že pokud některý prvek patří do *A* nebo *B*, musí být zrovna v té části *A* a *B* můžem samozřejmě v části pouze *A* nebo pouze *B* a část *A* a *B* může být úplně prázdná (jako je zcela určitě prázdná v tomto případě protože chtít, aby prvočísel bylo nejvýše 3 a zároveň nejméně 5 opravdu smysl nedává). Při vysvětlování je to samozřejmě lepší kreslit.

Př. 9: Petáková:

strana 10/cvičení 1
strana 10/cvičení 2
strana 11/cvičení 12
strana 11/cvičení 15 a) b) c)

Shrnutí: Do negace výroku musíme zahrnout všechny možnosti, které neobsahuje původní výrok.