

## 1.4.5 Ekvivalence

**Předpoklady:** 010404

**Př. 1:** Zapiš složené výroky pomocí formule.

- Přijdeš a omluvíš se, nebo jsi u nás skončil.
- Pokud je číslo dělitelné dvěma a třemi, je dělitelné šesti.
- Jestli tomu nerozumíš, tak jsi nedával pozor nebo si nepamatuješ látku minulé hodiny.
- Trápím se, trápím, postel slanou vodou zkrápím, ten zub tak strašně bolí, nepůjdu do školy.

a) Přijdeš a omluvíš se, nebo jsi u nás skončil.

$$(a \wedge b) \vee c$$

b) Pokud je číslo dělitelné dvěma a třemi, je dělitelné šesti.

$$(a \wedge b) \Rightarrow c$$

c) Jestli tomu nerozumíš, tak jsi nedával pozor nebo si nepamatuješ látku minulé hodiny.

$$a \Rightarrow (b \vee c)$$

d) Trápím se, trápím, postel slanou vodou zkrápím, ten zub tak strašně bolí, nepůjdu do školy.

$$a \wedge a \wedge b \wedge c \wedge d$$

**Pedagogická poznámka:** První radou je nedělat všechno najednou, ale postupně. Postupný přístup při sestavování formule se nám bude hodit při slovních úlohách.

**Př. 2:** Z výroků  $a$ : "Číslo je dělitelné devíti.",  $b$ : "Ciferný součet čísla je dělitelný třemi.", sestav implikace:  $a \Rightarrow b$ ,  $b \Rightarrow a$ ,  $\neg b \Rightarrow \neg a$ ,  $\neg a \Rightarrow \neg b$ . Které z nich jsou pravdivé?

Implikace  $a \Rightarrow b$ : Jestliže je číslo dělitelné devíti, pak je ciferný součet čísla dělitelný třemi (pravdivý výrok).

Implikace  $b \Rightarrow a$ : Jestliže je ciferný součet čísla dělitelný třemi, pak je číslo dělitelné devíti (nepravdivý výrok).

Implikace  $\neg b \Rightarrow \neg a$ : Jestliže ciferný součet čísla není dělitelný třemi, pak číslo není dělitelné devíti (pravdivý výrok).

Implikace  $\neg a \Rightarrow \neg b$ : Jestliže číslo není dělitelné devíti, pak ciferný součet čísla není dělitelný třemi (nepravdivý výrok).

Opět jsme si ověřili, že při obrácení implikace nemusíme získat výrok se stejnou pravdivostní hodnotou.

### Ekvivalence

**Př. 3:** Ekvivalence libovolných výroků  $a$ ,  $b$  (značíme ji  $a \Leftrightarrow b$ ) je konjunkce implikace  $a \Rightarrow b$  a obrácené implikace  $b \Rightarrow a$ . Zapiš tento výrok pomocí formule a doplň její tabulku pravdivostních hodnot.

Formuli sestavíme postupně.

Ekvivalence libovolných výroků  $a$ ,  $b$  je konjunkce  $\Rightarrow$  tvar výroku  $( ) \wedge ( )$

Doplňme implikace, ze kterých je sestavená konjunkce:  $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$

$a$	$b$	$a \Rightarrow b$	$b \Rightarrow a$	$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$	$a \Leftrightarrow b$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

Shrňme:

### Ekvivalence

- Ekvivalence libovolných výroků  $a, b$  je konjunkce implikace  $a \Rightarrow b$  a obrácené implikace  $b \Rightarrow a$ , tedy výrok  $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$  – značíme jej  $a \Leftrightarrow b$  a čteme ( **$a$  je ekvivalentní s  $b$  nebo  $a$  platí právě tehdy, když platí  $b$** ).
- Ekvivalence  $a \Leftrightarrow b$ , kde  $a, b$  jsou libovolné výroky je pravdivá pouze tehdy, když výroky  $a, b$  jsou oba pravdivé nebo oba nepravdivé.

Význam ekvivalence je schován už v názvu: ekvivalentní = stejný, odpovídající si. Když zjišťujeme, zda jsou dva výroky ekvivalentní, zjišťujeme, zda říkají to samé.

**Př. 4:** Rozhodni, zda jsou výroky  $a \Rightarrow b$ ,  $b \Rightarrow a$  a  $\neg b \Rightarrow \neg a$  ekvivalentní.

Napíšeme tabulku pravdivostních hodnot, a pokud budou sloupce u dvojice výroků stejné, jsou výroky ekvivalentní.

$a$	$b$	$\neg a$	$\neg b$	$a \Rightarrow b$	$b \Rightarrow a$	$\neg b \Rightarrow \neg a$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1

Sloupce výroků  $a \Rightarrow b$  a  $\neg b \Rightarrow \neg a$  jsou stejné  $\Rightarrow$  ekvivalence  $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$  platí vždy  $\Rightarrow$  výroky  $a \Rightarrow b$  a  $\neg b \Rightarrow \neg a$  jsou ekvivalentní.

Výrok  $b \Rightarrow a$  se nazývá **obrácená implikace** k implikaci  $a \Rightarrow b$  a **není s ní ekvivalentní**. Této skutečnosti jsme si už všimli v minulé hodině, teď ji máme dokázanou obecně.

Výrok  $\neg b \Rightarrow \neg a$  se nazývá **obměněná implikace** k implikaci  $a \Rightarrow b$  a **je s ní ekvivalentní**. Tato skutečnost je pro nás nová. Tento obecný poznatek využijeme v následujících příkladech a můžeme si ověřit, že bude fungovat nejen formálně, ale i obsahově. Tato vlastnost se používá při metodě nepřímého důkazu.

**Př. 5:** Zformuluj obměněnou implikaci k výroku: „Je-li trojúhelník pravoúhlý, pak pro jeho strany platí Pythagorova věta.“

Stačí mechanicky negovat obě věty a prohodit jejich pořadí v souvětí.

Neplatí-li pro strany trojúhelníku Pythagorova věta, pak není pravoúhlý.

Výsledný výrok se neshoduje s původním, přesto je pravdivý (z formálních důvodů i obsahově) a můžeme ho využít k rozhodování o pravoúhlosti trojúhelníků.

**Pedagogická poznámka:** Předchozí a následující příklad jsou cvičení na dosazování výroků do formulí. V některých případech je to trochu krkolomné, ale právě proto je to důležité cvičení obecnější schopnosti „dodržovat pravidlo“. Je důležité, aby maximum výroků zkusili studenti zformulovat sami.

**Př. 6:** Zformuluj obměněné implikace k následujícím výrokům:

- a) Jestliže je číslo  $x$  dělitelné šesti, tak je dělitelné třemi.
- b) Pokud je číslo  $x$  větší než 10, je kladné.
- c) Jestli to stihnu, tak přijdu.
- d) Jestli to řekneš ještě jednou, tak ti dám pěstí.

Stačí mechanicky negovat obě věty a prohodit jejich pořadí v souvětí.

a) Jestliže je číslo  $x$  dělitelné šesti, tak je dělitelné třemi.

Obměněná implikace: Jestliže číslo  $x$  není dělitelné třemi, není dělitelné šesti.

b) Pokud je číslo  $x$  větší než 10, je kladné.

Obměněná implikace: Pokud číslo není kladné, není větší než 10.

c) Jestli to stihnu, tak přijdu.

Obměněná implikace: Jestli nepřijdu, tak to nestihnu (jestli nepřijdu, tak jsem to nestihl).

d) Jestli to řekneš ještě jednou, tak ti dám pěstí.

Obměněná implikace: Jestli Ti nedám pěstí, tak to neřekneš ještě jednou (jestli jsem Ti nedal pěstí, tak jsi to neřekl ještě jednou).

**Př. 7:** Petáková:

strana 10/cvičení 8 a) b) d)

**Shrnutí:** Ekvivalence je pravdivá, když spojuje dva výroky se stejnou pravdivostní hodnotou.