1.4.5 Ekvivalence

Předpoklady: 010404

Př. 1: Zapiš složené výroky pomocí formule.
a) Přijdeš a omluvíš se, nebo jsi u nás skončil.
b) Pokud je číslo dělitelné dvěma a třemi, je dělitelné šesti.
c) Jestli tomu nerozumíš, tak si nedával pozor nebo si nepamatuješ látku minulé hodiny.
d) Trápím se, trápím, postel slanou vodou zkrápím, ten zub tak strašně bolí, nepůjdu do školy.

a) Přijdeš a omluvíš se, nebo jsi u nás skončil.
$(a \wedge b) \vee c$
b) Pokud je číslo dělitelné dvěma a třemi, je dělitelné šesti.
$(a \wedge b) \Rightarrow c$
c) Jestli tomu nerozumíš, tak si nedával pozor nebo si nepamatuješ látku minulé hodiny.
$a \Rightarrow (b \vee c)$
d) Trápím se, trápím, postel slanou vodou zkrápím, ten zub tak strašně bolí, nepůjdu do školy.
$a \wedge a \wedge b \wedge c \wedge d$

Pedagogická poznámka: První radou je nedělat všechno najednou, ale postupně. Postupný přístup při sestavování formule se nám bude hodit při slovních úlohách.

Př. 2: Z výroků *a*: "Číslo je dělitelné devíti.", *b*: "Ciferný součet čísla je dělitelný třemi.", sestav implikace: $a \Rightarrow b$, $b \Rightarrow a$, $\neg b \Rightarrow \neg a$, $\neg a \Rightarrow \neg b$. Které z nich jsou pravdivé?

Implikace $a \Rightarrow b$: Jestliže je číslo dělitelné devíti, pak je ciferný součet čísla dělitelný třemi (pravdivý výrok).
Implikace $b \Rightarrow a$: Jestliže je ciferný součet čísla dělitelný třemi, pak je číslo dělitelné devíti (nepravdivý výrok).
Implikace $\neg b \Rightarrow \neg a$: Jestliže ciferný součet čísla není dělitelný třemi, pak číslo není dělitelné devíti (pravdivý výrok).
Implikace $\neg a \Rightarrow \neg b$: Jestliže číslo není dělitelné devíti, pak ciferný součet čísla není dělitelný třemi (nepravdivý výrok).

Opět jsme si ověřili, že při obrácení implikace nemusíme získat výrok se stejnou pravdivostní hodnotou.

Ekvivalence

Př. 3: Ekvivalence libovolných výroků *a*, *b* (značíme ji $a \Leftrightarrow b$) je konjunkce implikace $a \Rightarrow b$ a obrácené implikace $b \Rightarrow a$. Zapiš tento výrok pomocí formule a doplň její tabulku pravdivostních hodnot.

Formuli sestavíme postupně.
Ekvivalence libovolných výroků *a*, *b* je konjunkce $\Rightarrow$ tvar výroku $(\ ) \wedge (\ )$

Doplníme implikace, ze kterých je sestavená konjunkce: $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$

a	***b***	$a \Rightarrow b$	$b \Rightarrow a$	$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$	$a \Leftrightarrow b$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

Shrneme:

Ekvivalence

- Ekvivalence libovolných výroků *a*, *b* je konjunkce implikace $a \Rightarrow b$ a obrácené implikace $b \Rightarrow a$, tedy výrok $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$ – značíme jej $a \Leftrightarrow b$ a čteme (***a* je ekvivalentní s *b*** nebo ***a* platí právě tehdy, když platí *b***).
- **Ekvivalence $a \Leftrightarrow b$, kde *a, b* jsou libovolné výroku je pravdivá pouze tehdy, když výroky *a, b* jsou oba pravdivé nebo oba nepravdivé.**

Význam ekvivalence je schován už v názvu: ekvivalentní = stejný, odpovídající si.
Když zjišťujeme, zda jsou dva výroky jsou ekvivalentní, zjišťujeme, zda říkají to samé.

Př. 4: Rozhodni, zda jsou výroky $a \Rightarrow b$, $b \Rightarrow a$ a $\neg b \Rightarrow \neg a$ ekvivalentní.

Napíšeme tabulku pravdivostních hodnot a pokud budou sloupce u dvojice výroků stejné, jsou výroky ekvivalentní.

a	***b***	$\neg a$	$\neg b$	$a \Rightarrow b$	$b \Rightarrow a$	$\neg b \Rightarrow \neg a$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1

Sloupce výroků $a \Rightarrow b$ a $\neg b \Rightarrow \neg a$ jsou stejné $\Rightarrow$ ekvivalence $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$ platí vždy $\Rightarrow$ výroky $a \Rightarrow b$ a $\neg b \Rightarrow \neg a$ jsou ekvivalentní.

Výrok $b \Rightarrow a$ se nazývá **obrácená implikace** k implikaci $a \Rightarrow b$ a **není s ní ekvivalentní**.
Této skutečnosti jsme si už všimli v minulé hodině, teď ji máme dokázanou obecně.

Výrok $\neg b \Rightarrow \neg a$ se nazývá **obměněná implikace** k implikaci $a \Rightarrow b$ a **je s ní ekvivalentní**.
Tato skutečnost je pro nás nová. Tento obecný poznatek využijeme v následujících příkladech a můžeme si ověřit, že bude fungovat nejen formálně, ale i obsahově.
Tato vlastnost se používá při metodě nepřímého důkazu.

Př. 5: Zformuluj obměněnou implikaci k výroku: „Je-li trojúhelník pravoúhlý, pak pro jeho strany platí Pythagorova věta.“.

Stačí mechanicky negovat obě věty a prohodit jejich pořadí v souvětí.
Neplatí-li pro strany trojúhelníku Pythagorova věta, pak není pravoúhlý.
Výsledný výrok se neshoduje s původním, přesto je pravdivý (z formálních důvodů i obsahově) a můžeme ho využít k rozhodování o pravoúhlosti trojúhelníků.

Pedagogická poznámka: Předchozí a následující příklad jsou cvičení na dosazování výroků do formulí. V některých případech je to trochu krkolomné, ale právě proto je to důležité cvičení obecnější schopnosti „dodržovat pravidlo“. Je důležité, aby maximum výroků zkusili studenti zformulovat sami.

Př. 6: Zformuluj obměněné implikace k následujícím výrokům:
a) Jestliže je číslo x dělitelné šesti, tak je dělitelné třemi.
b) Pokud je číslo x větší než 10, je kladné.
c) Jestli to stihnu, tak přijdu.
d) Jestli to řekneš ještě jednou, tak ti dám pěstí.

Stačí mechanicky negovat obě věty a prohodit jejich pořadí v souvětí.
a) Jestliže je číslo x dělitelné šesti, tak je dělitelné třemi.
Obměněná implikace: Jestliže číslo x není dělitelné třemi, není dělitelné šesti.
b) Pokud je číslo x větší než 10, je kladné.
Obměněná implikace: Pokud číslo není kladné, není větší než 10.
c) Jestli to stihnu, tak přijdu.
Obměněná implikace: Jestli nepřijdu, tak to nestihnu (jestli nepřijdu, tak jsem to nestihl).
d) Jestli to řekneš ještě jednou, tak ti dám pěstí.
Obměněná implikace: Jestli Ti nedám pěstí, tak to neřekneš ještě jednou (jestli jsem Ti nedal pěstí, tak jsi to neřekl ještě jednou).

Př. 7: Petáková:
strana 10/cvičení 8 a) b) d)

Shrnutí: Ekvivalence je pravdivá, když spojuje dva výroky se stejnou pravdivostní hodnotou.