

1.4.8 Kvantifikované výroky

Předpoklady: 010407

Kvantifikovat – určit množství.

Př. 1: Rozhodni, zda věta „Přirozená čísla jsou dělitelná třemi.“ je výrok.

Věta není výrok, těžko říct, o jaká přirozená čísla jde. Některá jsou dělitelná, třemi jiná ne.

Z předchozí věty můžeme vytvořit výrok, když určíme počet přirozených čísel, o kterých mluvíme. Dvě možnosti:

1.

Existuje alespoň jedno přirozené číslo dělitelné třemi. (pravdivý výrok).

Existuje alespoň jedno = existenční (malý) kvantifikátor, značí se \exists .

Matematický (stručný) zápis:

$\exists n \in N :$	$n = 3k$
Existuje alespoň jedno přirozené číslo n takové,	že n je dělitelné 3.

2.

Všechna přirozená čísla jsou dělitelná třemi. (nepravdivý výrok).

Všechna = obecný (velký) kvantifikátor, značí se \forall .

Matematický zápis:

$\forall n \in N :$	$n = 3k$
Všechna přirozená čísla n	jsou dělitelná 3.

Pedagogická poznámka: Přečtení následujících vět představuje pro žáky velký problém.

Nejdříve radím přečíst samostatně jednotlivé části tvrzení, pak u tabule postupně sestavujeme příklad 2.

Př. 2: Přečti (a zapiš slovy) následující výrok: „ $\forall n \in N \ n \neq 1, \exists k \in N : k < n$.“ Rozhodni, zda je tento výrok pravdivý.

Pro všechna přirozená čísla n různá od jedné existuje alespoň jedno přirozené číslo k , které je menší než n .

Výrok je pravdivý.

Př. 3: Přečti (a zapiš slovy) následující výrok: „ $\exists n \in N \ \forall p \in N \ p \neq n : p > n$.“

Rozhodni, zda je tento výrok pravdivý.

Existuje přirozené číslo n takové, že všechna přirozená čísla p různá od n jsou větší než n .

Výrok je pravdivý, hledaným číslem n je 1.

Př. 4: Pomocí kvantifikátorů vytvoř z věty: „Pro reálná čísla x a y , platí $x^2 + y^2 = 0$.“, pravdivý a nepravdivý výrok.

Pravdivý výrok:

$\exists x \in R$ a $\exists y \in R$, platí $x^2 + y^2 = 0$.

Existuje alespoň jedna dvojice reálných čísel x a y , pro kterou platí $x^2 + y^2 = 0$.

\Rightarrow pravda (dvojice čísel 0, 0).

Nepravdivý výrok:

$\forall x \in R$ a $\forall y \in R$, platí $x^2 + y^2 = 0$.

Pro každou dvojici reálných čísel x, y platí $x^2 + y^2 = 0$.

\Rightarrow Nepravda (platí pouze pro dvojici čísel 0, 0).

Př. 5: Pomocí kvantifikátorů vytvoř z věty: „Pro reálné číslo x platí $x^2 > -1$.“, výroky a rozhodni o jejich pravdivosti. Který z obou výroků má větší vypovídací hodnotu?

$\exists x \in R$, platí $x^2 > -1$.

Existuje reálné číslo x , pro které platí $x^2 > -1$.

- pravda

$\forall x \in R$, platí $x^2 > -1$

Pro každé reálné číslo x platí $x^2 > -1$.

- pravda

Více toho říká druhý výrok (vlastnost mají všechna čísla ...), z jeho pravdivosti vyplývá i pravdivost prvního výroku. I proto se zřejmě obecný kvantifikátor označuje jako velký.

Pedagogická poznámka: Zbytek hodiny je věnován negování složitějších výroků. Procvičuje se látka z minulých hodin, ale zejména postupné rozkládání složitějších úkolů na jednodušší části. První rada vždy bývá: „Napiš si formulí, o jaký výrok jde, zneguj formulí, ...“

Př. 6: Neguj výroky.

a) „Trojúhelník má dvě shodné strany a dva shodné úhly nebo není rovnoramenný.“

b) „Je-li číslo dělitelné šesti, pak je dělitelné dvěma a třemi.“

c) "Číslo nazýváme racionální, právě když ho můžeme zapsat desetinným číslem nebo nekonečným periodickým desetinným rozvojem."

d) „Má-li čtyřúhelník všechny strany shodné, pak jde o čtverec nebo kosočtverec.“

e) „Přirozené číslo je dělitelné 6, právě když je dělitelné 2 a 3.“

f) „Je-li trojúhelník rovnostranný, pak je ostroúhlý.“

a) „Trojúhelník má dvě shodné strany a dva shodné úhly nebo není rovnoramenný.“

Tři výroky:

- a : Trojúhelník má dvě shodné strany.
- b : Trojúhelník má dva shodné úhly.
- c : Trojúhelník není rovnoramenný.

Výrok má tvar $(a \wedge b) \vee c$, znegujeme na $\neg(a \wedge b) \wedge \neg c = (\neg a \vee \neg b) \wedge \neg c$.

Trojúhelník nemá dvě shodné strany nebo nemá dva shodné úhly a je rovnoramenný.

b) „Je-li číslo dělitelné šesti, pak je dělitelné dvěma a třemi.“

Tři výroky:

- a : Číslo je dělitelné šesti.
- b : Číslo je dělitelné dvěma.

- c : Číslo je dělitelné třemi.

Výrok má tvar $a \Rightarrow (b \wedge c)$, znegujeme na $a \wedge \neg(b \wedge c) = a \wedge (\neg b \vee \neg c)$.

Číslo je dělitelné šesti a není dělitelné třemi nebo dvěma.

c) "Číslo nazýváme racionální, právě když ho můžeme zapsat desetinným číslem nebo nekonečným periodickým desetinným rozvojem."

Tři výroky:

- a : Číslo nazýváme racionální.
- b : Číslo můžeme zapsat desetinným číslem.
- c : Číslo můžeme zapsat nekonečným periodickým desetinným rozvojem.

Výrok má tvar $a \Leftrightarrow (b \vee c)$, znegujeme na $\neg a \Leftrightarrow (b \vee c)$ nebo

$$a \Leftrightarrow \neg(b \vee c) = a \Leftrightarrow (\neg b \wedge \neg c).$$

$\neg a \Leftrightarrow (b \vee c)$: "Číslo nenazýváme racionální, právě když ho můžeme zapsat desetinným číslem nebo nekonečným periodickým desetinným rozvojem."

$a \Leftrightarrow (\neg b \vee \neg c)$: "Číslo nazýváme racionální, právě když ho nemůžeme zapsat desetinným číslem ani nekonečným periodickým desetinným rozvojem."

d) „Má-li čtyřúhelník všechny strany shodné, pak jde o čtverec nebo kosočtverec.“

Tři výroky:

- a : Čtyřúhelník má všechny strany shodné.
- b : Čtyřúhelník je čtverec.
- c : Čtyřúhelník je kosočtverec.

Výrok má tvar $a \Rightarrow (b \vee c)$, znegujeme na $a \wedge \neg(b \vee c) = a \wedge (\neg b \wedge \neg c)$.

„Čtyřúhelník má všechny strany shodné a není to čtverec ani kosočtverec.“

e) „Přirozené číslo je dělitelné 6, právě když je dělitelné 2 a 3.“

Tři výroky:

- a : Přirozené číslo je dělitelné 6.
- b : Přirozené číslo je dělitelné 2.
- c : Přirozené číslo je dělitelné 3.

Výrok má tvar $a \Leftrightarrow (b \wedge c)$, znegujeme na $\neg a \Leftrightarrow (b \wedge c)$ nebo

$$a \Leftrightarrow \neg(b \wedge c) = a \Leftrightarrow (\neg b \vee \neg c).$$

$\neg a \Leftrightarrow (b \wedge c)$: Přirozené číslo není dělitelné 6, právě když je dělitelné 2 a 3.

$a \Leftrightarrow (\neg b \vee \neg c)$: Přirozené číslo je dělitelné 6, právě když není dělitelné 2 nebo 3.

f) „Je-li trojúhelník rovnostranný, pak je ostroúhlý.“

Dva výroky:

a : Trojúhelník je rovnostranný.

b : Trojúhelník je ostroúhlý.

Výrok má tvar $a \Rightarrow b$, znegujeme na $a \wedge \neg b$.

Trojúhelník je rovnostranný a je pravoúhlý nebo tupoúhlý.

Shrnutí: Některé věty se stávají výroky poté, co přidáme malý (\exists - existuje alespoň jedno) nebo velký (\forall - pro všechna) kvantifikátor.