1.4.8 Kvantifikované výroky

Předpoklady: 010407

Kvantifikovat – určit množství.

Př. 1: Rozhodni, zda věta „Přirozená čísla jsou dělitelná třemi.“ je výrok.

Věta není výrok, těžko říct, o jaká přirozená čísla jde. Některá jsou dělitelná třemi jiná ne.

Z předchozí věty můžeme vytvořit výrok, když určíme počet přirozených čísel, o kterých mluvíme. Dvě možnosti:

1.
Existuje alespoň jedno přirozené číslo dělitelné třemi. (pravdivý výrok).
Existuje alespoň jedno = existenční (malý) **kvantifikátor**, značí se $\exists$.
Matematický (stručný) zápis:

$\exists n \in N$ **:**	$n = 3k$
Existuje alespoň jedno přirozené číslo *n* takové,	že *n* je dělitelné 3.

2.
Všechna přirozená čísla jsou dělitelná třemi. (nepravdivý výrok).
Všechna = obecný (velký) **kvantifikátor**, značí se $\forall$.
Matematický zápis:

$\forall n \in N$ **:**	$n = 3k$
Všechna přirozená čísla *n*	jsou dělitelná 3.

Pedagogická poznámka: Přečtení následujících vět představuje pro žáky velký problém. Nejdříve radím přečíst samostatně jednotlivé části tvrzení, pak u tabule postupně sestavujeme příklad 2.

Př. 2: Přečti (a zapiš slovy) následující výrok: „$\forall n \in N \quad n \neq 1$**,** $\exists k \in N$ **:** $k < n$**.**“ Rozhodni, zda je tento výrok pravdivý.

Pro všechna přirozená čísla *n* různá od jedné existuje alespoň jedno přirozené číslo *k*, které je menší než *n*.
Výrok je pravdivý.

Př. 3: Přečti (a zapiš slovy) následující výrok: „$\exists n \in N \quad \forall p \in N \quad p \neq n$ **:** $p > n$**.**“ Rozhodni, zda je tento výrok pravdivý.

Existuje přirozené číslo *n* takové, že všechna přirozená čísla *p* různá od *n* jsou větší než *n*.
Výrok je pravdivý, hledaným číslem *n* je 1.

Př. 4: Pomocí kvantifikátorů vytvoř z věty: „Pro reálná čísla *x* a *y*, platí $x^2 + y^2 = 0$.“, pravdivý a nepravdivý výrok

Pravdivý výrok:

$\exists x \in R$ a $\exists y \in R$, platí $x^2 + y^2 = 0$.
Existuje alespoň jedna dvojice reálných čísel *x* a *y*, pro kterou platí $x^2 + y^2 = 0$.
$\Rightarrow$ pravda (dvojice čísel 0, 0).

Nepravdivý výrok:
$\forall x \in R$ a $\forall y \in R$, platí $x^2 + y^2 = 0$.
Pro každou dvojici reálných čísel *x*, *y* platí $x^2 + y^2 = 0$.
$\Rightarrow$ Nepravda (platí pouze pro dvojici čísel 0, 0).

Př. 5: Pomocí kvantifikátorů vytvoř z věty: „Pro reálné číslo *x* platí $x^2 > -1$.", výroky a rozhodni o jejich pravdivosti. Který z obou výroků má větší vypovídací hodnotu?

$\exists x \in R$, platí $x^2 > -1$.
Existuje reálné číslo *x*, pro které platí $x^2 > -1$.
- pravda
$\forall x \in R$, platí $x^2 > -1$
Pro každé reálné číslo *x* platí $x^2 > -1$.
- pravda
Více toho říká druhý výrok (vlastnost mají všechna čísla …), z jeho pravdivosti vyplývá i pravdivost prvního výroku. I proto se zřejmě obecný kvantifikátor označuje jako velký.

Pedagogická poznámka: Zbytek hodiny je věnován negování složitějších výroků. Procvičuje se látka z minulých hodin, ale zejména postupné rozkládání složitějších úkolů na jednodušší části. První rada vždy bývá napiš si formulí, o jaký výrok jde, zneguj formuli, …

Př. 6: Neguj výroky.
a) „Trojúhelník má dvě shodné strany a dva shodné úhly nebo není rovnoramenný."
b) „Je-li číslo dělitelné šesti, pak je dělitelné dvěma a třemi."
c) "Číslo nazýváme racionální, právě když ho můžeme zapsat desetinným číslem nebo nekonečným periodickým desetinným rozvojem."
d) „Má-li čtyřúhelník všechny strany shodné, pak jde o čtverec nebo kosočtverec."
e) „Přirozené číslo je dělitelné 6, právě když je dělitelné 2 a 3."
f) „Je-li trojúhelník rovnostranný, pak je ostroúhlý."

a) „Trojúhelník má dvě shodné strany a dva shodné úhly nebo není rovnoramenný."
Tři výroky:
- *a*: Trojúhelník má dvě shodné strany.
- *b*: Trojúhelník má dva shodné úhly.
- *c*: Trojúhelník není rovnoramenný.

Výrok má tvar $(a \wedge b) \vee c$, znegujeme na $\neg(a \wedge b) \wedge \neg c = (\neg a \vee \neg b) \wedge \neg c$.
Trojúhelník nemá dvě shodné strany nebo nemá dva shodné úhly a je rovnoramenný.

b) „Je-li číslo dělitelné šesti, pak je dělitelné dvěma a třemi."
Tři výroky:
- *a*: Číslo je dělitelné šesti.
- *b*: Číslo je dělitelné dvěma.

- c: Číslo je dělitelné třemi.

Výrok má tvar $a \Rightarrow (b \wedge c)$, znegujeme na $a \wedge \neg(b \wedge c) = a \wedge (\neg b \vee \neg c)$.
Číslo je dělitelné šesti a není dělitelné třemi nebo dvěma.

c) "Číslo nazýváme racionální, právě když ho můžeme zapsat desetinným číslem nebo nekonečným periodickým desetinným rozvojem."
Tři výroky:

- a: Číslo nazýváme racionální.
- b: Číslo můžeme zapsat desetinným číslem.
- c: Číslo můžeme zapsat nekonečným periodickým desetinným rozvojem.

Výrok má tvar $a \Leftrightarrow (b \vee c)$, znegujeme na $\neg a \Leftrightarrow (b \vee c)$ nebo
$a \Leftrightarrow \neg(b \vee c) = a \Leftrightarrow (\neg b \wedge \neg c)$.
$\neg a \Leftrightarrow (b \vee c)$: "Číslo nenazýváme racionální, právě když ho můžeme zapsat desetinným číslem nebo nekonečným periodickým desetinným rozvojem."
$a \Leftrightarrow (\neg b \vee \neg c)$: "Číslo nazýváme racionální, právě když ho nemůžeme zapsat desetinným číslem ani nekonečným periodickým desetinným rozvojem."

d) „Má-li čtyřúhelník všechny strany shodné, pak jde o čtverec nebo kosočtverec.“
Tři výroky:

- a: Čtyřúhelník má všechny strany shodné.
- b: Čtyřúhelník je čtverec.
- c: Čtyřúhelník je kosočtverec.

Výrok má tvar $a \Rightarrow (b \vee c)$, znegujeme na $a \wedge \neg(b \vee c) = a \wedge (\neg b \wedge \neg c)$.
„Čtyřúhelník má všechny strany shodné a není to čtverec ani kosočtverec.

e) „Přirozené číslo je dělitelné 6, právě když je dělitelné 2 a 3.“
Tři výroky:

- a: Přirozené číslo je dělitelné 6.
- b: Přirozené číslo je dělitelné 2.
- c: Přirozené číslo je dělitelné 3.

Výrok má tvar $a \Leftrightarrow (b \wedge c)$, znegujeme na $\neg a \Leftrightarrow (b \wedge c)$ nebo
$a \Leftrightarrow \neg(b \wedge c) = a \Leftrightarrow (\neg b \vee \neg c)$.
$\neg a \Leftrightarrow (b \wedge c)$: Přirozené číslo není dělitelné 6, právě když je dělitelné 2 a 3.
$a \Leftrightarrow (\neg b \vee \neg c)$: Přirozené číslo je dělitelné 6, právě když není dělitelné 2 nebo 3.

f) „Je-li trojúhelník rovnostranný, pak je ostroúhlý.“
Dva výroky:
a: Trojúhelník je rovnostranný.
b: Trojúhelník je ostroúhlý.
Výrok má tvar $a \Rightarrow b$, znegujeme na $a \wedge \neg b$.
Trojúhelník je rovnostranný a je pravoúhlý nebo tupoúhlý.

Shrnutí: Některé věty se stávají výroky poté co přidáme malý ($\exists$ - existuje alespoň jedno) nebo velký ($\forall$ - pro všechna) kvantifikátor.