1.4.9 Negace kvantifikovaných výroků

Předpoklady: 010408

Pedagogická poznámka: Na konci hodiny je třeba zadat domácí přípravu shrnutí na příští hodinu.

Př. 1: Přečti následující výroky a rozhodni o jejich pravdivosti:
a) „$\forall n \in N$, $\exists x \in R$, $(x < n) \wedge (x + 1 > n)$."
b) „$\exists n \in N$, $\forall x \in R$, $(x = 0) \vee (n < |x|)$."

a) „$\forall n \in N$, $\exists x \in R$, $(x < n) \wedge (x + 1 > n)$."
Pro každé přirozené číslo *n* existuje reálné číslo *x* takové, že $x < n$ a zároveň $x + 1 > n$.
Věta je pravdivá, stačí když zvolíme například $x = n - 0,5$.

b) „$\exists n \in N$, $\forall x \in R$, $(x = 0) \vee (n < |x|)$."
Existuje alespoň jedno přirozené číslo *n* takové, že pro všechna reálná čísla *x* platí: že *x* je buď nula nebo $n < |x|$.
Věta je nepravdivá, nejmenším přirozeným číslem je číslo 1, které je větší než absolutní hodnoty nenulových reálných čísel v intervalu $(-1;1)$.

Z novodobých dějin ČR (kapitola první)
31.10.2008 probíhal na gymnáziu poslední den týdenní hloubkové kontroly České školní inspekce. Poté, co inspektoři zkontrolovali, zda jsou třídnice odškrtané zprava nahoře do leva dole, zda je ve všech třídnicích za loňský školní rok dvanáctkrát napsáno, že studenti byli poučeni o chování a bezpečnosti, a poté co pečlivě ověřili, zda škola neporušila pravidla hospodaření a nezakoupila více než pět chlebíčků jako občerstvení maturitní komise, zbyly inspektorům ještě celé dvě hodiny, ve kterých se rozhodli navštívit výuku. První z vylosovaných učitelů byl Mgr. Topůrko. Měl studenty rád, byl velmi oblíbený a tak, když se ho pan inspektor Bedlivý ptal, zda jsou studenti hodní, řekl: „Pane inspektore, vsadím se s Vámi klidně o své boty, všichni jsou hodní a nebudou zlobit". Pan inspektor se zasmál a paní učitelka Nováková (kolegyně Mgr. Topůrka) se chytla za hlavu: „Jirko, to nemůžeš vyhrát, vždyť…

Př. 2: Jak asi zdůvodnila Mgr. Nováková, že Mgr. Topůrko prohraje?

„Stačí, aby jediný z nich zazlobil, a prohraješ".

A tak se i stalo. Robert není zlý student, ale zkrátka se neovládá a od té doby chodí Mgr. Topůrko bos.

Př. 3: Neguj výrok: „Pro všechna přirozená čísla platí, že mají alespoň dva dělitele."

Výrok je nepravdivý (1 má jen jednoho dělitele) $\Rightarrow$ negace musí být pravdivá.
Negace: Existuje alespoň jedno číslo, které má méně než 2 dělitele.

To je ta 1.

Př. 4: Neguj výrok: „Pro všechny prvky množiny *M* platí bla bla bla.“

Existuje alespoň jeden prvek množiny *M*, pro který neplatí bla bla bla.

Z novodobých dějin ČR (kapitola druhá)
Druhým vylosovaným učitelem byla Ing. Ohradová. Studenty ráda neměla a nedůvěřovala jim. Již před hodinou tělocviku varovala inspektora, že třída je hloupá, líná a nepořádná a určitě alespoň jeden student nebude mít cvičební úbor. Pan inspektor se divil a vsadil se s paní učitelkou (o Topůrkovy boty), že určitě nebude mít pravdu.

Př. 5: Jak dopadla kontrola cvičebních úborů ve třídě, když pan inspektor opravdu vyhrál?

Ani jeden žák si úbor nezapomněl.

A tak získala nové boty i paní inspektorka Bedlivá.

Př. 6: Neguj výrok: „Existuje alespoň jedno přirozené číslo, které má méně než 2 dělitele.“

Výrok je pravdivý (jednička má jednoho dělitele) $\Rightarrow$ negace musí být nepravdivá.
Negace: Všechna přirozená čísla mají alespoň 2 dělitele.
Pro jedničku to neplatí.

Pedagogická poznámka: Při zadání dalšího příkladu je dobré studenty upozornit, aby si přečetli pozorně zadání, protože v následujícím příkladu jde u množiny *M* o vlastnost ga ga ga a ne bla bla bla, a nedělali tak zbytečné chyby.

Př. 7: Neguj výrok: „Existuje alespoň jeden prvek množiny *M*, pro který platí ga ga ga.“

Pro žádný prvek množiny *M*, neplatí ga ga ga.

Výsledky předchozích příkladů můžeme shrnout do tabulky:

v	$\neg v$
Každý prvek množiny *M* má vlastnost.	Alespoň jeden prvek množiny *M* nemá vlastnost.
Alespoň jeden prvek množiny *M* má vlastnost.	Žádný prvek množiny *M* nemá vlastnost.

Pedagogická poznámka: Při opisování tabulky jsem si u jedné ze studentek (které činí velké problémy, cokoliv si zapamatovat) všiml zajímavé maličkosti. Místo aby opisovala tabulku po řádcích (tedy v logické návaznosti - výrok a pak jeho negace), postupovala po sloupcích (tedy nejdřív oba výroky a pak negace). Chvíli jsme si pak povídalo o tom, že i takové maličkosti mohou mít vliv na to, jestli v hlavě něco zůstane nebo ne.

Př. 8: Neguj následující výroky:
a: „Všichni studenti 1.B jsou mladší 18-ti let.“
b: „Existuje alespoň jeden pravoúhlý trojúhelník.“

c: „Průnik libovolné množiny s množinou prázdnou je prázdná množina".
d: „Na každém šprochu, pravdy trochu."

$\neg a$: Alespoň jeden student 1.B je starší 18 let.
$\neg b$: Žádný trojúhelník není pravoúhlý.
$\neg c$: Existuje alespoň jedna množina, jejíž průnik s množinou prázdnou je neprázdný.
$\neg d$: Existuje alespoň jeden šproch, na kterém není žádná pravda.

Př. 9: Neguj výroky. Urči jejich pravdivostní hodnotu.
a) „Každé přirozené číslo je kladné a celé."
b) "Libovolné přirozené číslo má alespoň tři dělitele nebo je prvočíslo."

a) „Každé přirozené číslo je kladné a celé." - pravdivý výrok.
Dva výroky:
a: Každé přirozené číslo je kladné.
b: Každé přirozené číslo je celé.
Výrok má tvar $a \wedge b$, znegujeme na $\neg a \vee \neg b$. Negujeme i kvantifikaci „Pro všechna platí …" na „Existuje alespoň jedno, pro které neplatí…"
Existuje alespoň jedno přirozené číslo, které není kladné nebo není celé. - nepravdivý výrok

b) "Libovolné přirozené číslo má alespoň tři dělitele nebo je prvočíslo". - nepravdivý výrok (jednička má jediného dělitele a není prvočíslo).
Dva výroky:
a: Libovolné přirozené číslo má alespoň tři dělitele.
b: Libovolné přirozené číslo je prvočíslo.
Výrok má tvar $a \vee b$, znegujeme na $\neg a \wedge \neg b$. Negujeme i kvantifikaci „Pro všechna platí …" na „Existuje alespoň jedno, pro které neplatí…"
Existuje alespoň jedno přirozené číslo, které má nejvýše dva dělitele a není prvočíslo. - pravdivý výrok

Př. 10: Neguj následující výroky.
a) Právě když jsem to konečně pochopil a začalo mi to vycházet, zazvonilo a učitel začal sbírat papíry.
b) Všichni pořádní kluci už jsou zadaní nebo o mě nestojí.
c) Jestli se nevzchopíš a nezačneš něco dělat, zkrouhnu ti kapesné nebo ti zakážu počítač.
d) Člověk se pořád snaží a nikdo ho nepochválí, nikdo ho neocení.
e) Vždycky když jsem se o něco snažil, měl jsem smůlu nebo se změnila situace nebo mě někdo podrazil a nic z toho nebylo.

a) Právě když jsem to konečně pochopil a začalo mi to vycházet, zazvonilo a učitel začal sbírat papíry.
Čtyři výroky:
a: Konečně jsem to pochopil.
b: Začalo mi to vycházet.
c: Zazvonilo.
d: Učitel začal sbírat papíry.
Tvar výroku: $(a \wedge b) \Leftrightarrow (c \wedge d)$ $\Rightarrow$ dvě možné negace:

- $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow (c \wedge d) = \neg a \vee \neg b \Leftrightarrow (c \wedge d)$: Právě když jsem to konečně nepochopil nebo mě to nezačalo vycházet, zazvonilo a učitel začal sbírat papíry.

- $(a \wedge b) \Leftrightarrow \neg(c \wedge d) = (a \wedge b) \Leftrightarrow \neg c \vee \neg d$: Právě když jsem to konečně pochopil a začalo mě to vycházet, nezazvonilo nebo učitel nezačal sbírat papíry.

b) Všichni pořádní kluci už jsou zadaní nebo o mě nestojí.
Dva výroky:
a: Všichni pořádní kluci už jsou zadaní. *b*: Všichni pořádní kluci o mě nestojí.
Tvar výroku: $a \vee b$ $\Rightarrow$ negace $\neg a \wedge \neg b$: Existuje alespoň jeden pořádný kluk, který není zadaný a který o mě stojí.

c) Jestli se nevzchopíš a nezačneš něco dělat, zkrouhnu ti kapesné nebo ti zakážu počítač.
Čtyři výroky:
a: Nevzchopíš se. *b*: Nezačneš něco dělat.
c: Zkrouhnu ti kapesné. *d*: Zakážu Ti počítač.
Tvar výroku: $(a \wedge b) \Rightarrow (c \vee d)$ $\Rightarrow$ negace: $a \wedge b \wedge \neg c \wedge \neg d$: Nevzchopíš, nezačneš něco dělat a nezkrouhnu Ti kapesné ani Ti nezakážu počítač.

d) Člověk se pořád snaží a nikdo ho nepochválí, nikdo ho neocení.
Tři výroky:
a: Člověk se pořád snaží. *b*: Nikdo ho nepochválí.
c: Nikdo ho neocení.
Tvar výroku: $a \wedge b \wedge c$ $\Rightarrow$ negace: $\neg a \vee \neg b \vee \neg c$: Člověk se alespoň chvilku nesnaží nebo ho alespoň někdo ocení nebo ho alespoň někdo pochválí.

e) Vždycky když jsem se o něco snažil, měl jsem smůlu nebo se změnila situace nebo mě někdo podrazil a nic z toho nebylo.
Pět výroků:
a: O něco jsem se snažil. *b*: Měl jsem smůlu.
c: Změnila se situace. *d*: Někdo mě podrazil.
e: Nic z toho nebylo.
Tvar výroku: Kvantifikovaný výrok „pro všechny platí …“ $\Rightarrow$ negace „Alespoň jednou neplatí …“.
Vnitřní výrok: $a \Rightarrow (a \vee c \vee d \wedge e)$ $\Rightarrow$ negace: $a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge \neg d \vee \neg e$: Alespoň jednou jsem se o něco snažil a neměl jsem smůlu, situace se nezměnila a nikdo mě nepodrazil nebo z toho něco bylo.

Př. 11: Petáková:
strana 11/cvičení 12
strana 11/cvičení 13
strana 11/cvičení 14
strana 11/cvičení 15

Shrnutí: Negace kvantifikovaných výroků odpovídají běžným předpokladům.