1.4.10 Formální logika shrnutí

Předpoklady: 010409

Shrnutí logiky

Důležité znalosti
- konjunkce, $a \wedge b$, "a", pravda, jen když jsou oba výroky pravdivé (jako průnik)
- disjunkce, $a \vee b$, "nebo", lež, jen když jsou oba výroky nepravdivé (jako sjednocení)
- implikace, $a \Rightarrow b$, "Jestliže ..., pak...", lež, jen když z pravdy plyne nepravda, nejde obrátit
- ekvivalence, $a \Leftrightarrow b$, "právě, když", pravdivá, když oba výroky mají stejnou pravdivost
- obměněná implikace $\neg b \Rightarrow \neg a$
- $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow \neg a \vee \neg b$
- $\neg(a \vee b) \Leftrightarrow \neg a \wedge \neg b$
- $\neg(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow a \wedge \neg b$
- $\neg(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow (\neg a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow (a \Leftrightarrow \neg b)$
- $\exists$ - existuje ..., negace: pro všechny neplatí, ...
- $\forall$ - pro všechna ..., negace: existuje, že neplatí, ...

Zádrhele
- "Negace pokrývá všechny ostatní možnosti".
- Implikace z nepravdivého předpokladu je pravdivá.
- Negace implikace je konjunkce $\Rightarrow$ nezačíná jestliže.

Dobré rady
- U těžších výroků si napsat formuli, tu znegovat a pak do ní dosadit.
- Při negaci výroků o množství si můžeme pomoci konkrétními čísly.

Př. 1: Jsou dány výroky:
a: "Kryštof Kolumbus objevil Ameriku v roce 1492."
b: "Afrika je nejmenší světadíl."
c: "Rychlost je dána vztahem $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$."
Sestav z těchto výroků (bez použití negace):
a) pravdivou implikaci, b) nepravdivou disjunkci,
c) pravdivou konjunkci, d) nepravdivou ekvivalenci.

a) pravdivá implikace
Pravdivá implikace $\Rightarrow$ několik možností:
- $1 \Rightarrow 1 = 1$ (z pravdivého předpokladu pravdivý závěr): „Jestliže Kryštof Kolumbus objevil Ameriku v roce 1492, pak rychlost je dána vztahem $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$."

- $0 \Rightarrow 1 = 1$, $0 \Rightarrow 0 = 1$ (z nepravdivého předpokladu cokoliv): „Jestliže Afrika je nejmenší světadíl, pak rychlost je dána vztahem $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$." (více možností)

b) nepravdivá disjunkce
Nepravdivá disjunkce $\Rightarrow$ jediný případ $0 \vee 0 = 0$ $\Rightarrow$ výrok *b* musíme použít dvakrát: „Afrika je nejmenší světadíl nebo Afrika je nejmenší světadíl."

c) pravdivá konjunkce
Pravdivá konjunkce $\Rightarrow$ jediný případ $1 \wedge 1 = 1$ $\Rightarrow$ libovolná kombinace výroků *a*, *c*: „Kryštof Kolumbus objevil Ameriku v roce 1492 a rychlost je dána vztahem $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$."

d) nepravdivá ekvivalence
Nepravdivá ekvivalence $\Rightarrow$ dvě možnosti $1 \Leftrightarrow 0 = 0$ nebo $0 \Leftrightarrow 1 = 0$ $\Rightarrow$ ekvivalenci sestavíme z výroku *b* a jednoho z výroků *a*, *c*: „Rychlost je dána vztahem $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, právě když Afrika je nejmenší světadíl."

Př. 2: Rozhodni pomocí tabulky pravdivostních hodnot, zda je výrok $(\neg a \vee b) \vee (a \wedge \neg b)$ tautologie.

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \vee b$	$a \wedge \neg b$	$(\neg a \vee b) \vee (a \wedge \neg b)$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1

Výrok $(\neg a \vee b) \vee (a \wedge \neg b)$ je pravdivý vždy bez ohledu na pravdivost výroků *a*, *b* $\Rightarrow$ jedná se o tautologii.

Př. 3: Neguj výroky.
a) Bod *A* leží na přímkách *p*, *q*.
b) Složené číslo má alespoň tři dělitele.
c) Ke každému reálnému číslu *x* existuje celé číslo *n*, pro které platí $n < x$.
d) Rovnice $x^2 - 2x + 3 = 0$ má právě dvě řešení.
e) Trojúhelník je pravoúhlý, právě když pro jeho strany platí $a^2 + b^2 = c^2$.
f) Jestliže je diskriminant větší nebo roven nule, má rovnice jedno nebo dvě řešení.

a) Bod *A* leží na přímkách *p*, *q*.
Výrok ve tvaru $a \wedge b$ $\Rightarrow$ negace $\neg a \vee \neg b$.
Bod *A* neleží na přímce *p* nebo neleží na přímce *q*.

b) Složené číslo má alespoň tři dělitele.
Jednoduchý výrok.
Složené číslo má nejvýše dva dělitele.

c) Ke každému reálnému číslu x existuje celé číslo n, pro které platí $n < x$.
Kvantifikovaný výrok.
Existuje reálné číslo x, ke kterému neexistuje celé číslo n, pro které platí $n < x$.

d) Rovnice $x^2 - x - 6 = 0$ má právě dvě řešení.
Jednoduchý výrok, dáváme pozor na pokrytí všech možností.
Rovnice $x^2 - x - 6 = 0$ má žádné, jedno nebo více než dvě řešení.

e) Trojúhelník je pravoúhlý, právě když pro jeho strany platí $a^2 + b^2 = c^2$.
Výrok ve tvaru $a \Leftrightarrow b \Rightarrow$ negace ve tvaru $\neg a \Leftrightarrow b$ nebo $a \Leftrightarrow \neg b$.
Trojúhelník není pravoúhlý, právě když pro jeho strany platí $a^2 + b^2 = c^2$.
Trojúhelník je pravoúhlý, právě když pro jeho strany neplatí $a^2 + b^2 = c^2$.

f) Jestliže je diskriminant větší nebo roven nule, má rovnice jedno nebo dvě řešení.
Výrok ve tvaru $(a \vee b) \Rightarrow (c \vee d) \Rightarrow$ negace ve tvaru

$(a \vee b) \wedge \neg(c \vee d) = (a \vee b) \wedge (\neg c \wedge \neg d)$.
Diskriminant je větší nebo roven nule a rovnice nemá ani jedno ani dvě řešení.

Dodatek: Některé negace mohou mít i jiné než uvedené tvary:
e) Trojúhelník je ostroúhlý nebo tupoúhlý, právě když pro jeho strany platí $a^2 + b^2 = c^2$.
f) Diskriminant je větší nebo roven nule a rovnice má žádné nebo více než dvě řešení.

Př. 4: Zformuluj obměněné implikace výroků.
a) Když všechno spočítáš, dostaneš plus.
b) Shodují-li se pravoúhlé trojúhelníky ve svém vnitřním nepravém úhlu, jsou si podobné.
c) Je-li číslo dělitelné 3 a 5, je dělitelné patnácti.
d) Když trojúhelník není tupoúhlý, je ostroúhlý nebo pravoúhlý.

a) Když všechno spočítáš, dostaneš plus.
Když nedostaneš plus, nespočítáš všechno.

b) Shodují-li se pravoúhlé trojúhelníky ve svém vnitřním nepravém úhlu, jsou si podobné.
Nejsou-li si dva pravoúhlé trojúhelníky podobné, neshodují se ve svém vnitřním nepravém úhlu.

c) Je-li číslo dělitelné 3 a 5, je dělitelné patnácti.
Pokud číslo není dělitelné patnácti, není dělitelné 3 nebo 5.

d) Když trojúhelník není tupoúhlý, je ostroúhlý nebo pravoúhlý.
Když trojúhelník není ostroúhlý ani pravoúhlý, je tupoúhlý.

Př. 5: Jsou dány pravdivé výroky *a*, *b* a nepravdivé výroky *c*, *d*. Rozhodni o pravdivosti výroků:

a) $(\neg a \Rightarrow b) \vee (c \wedge \neg d) \vee (a \Leftrightarrow d)$, b) $(a \wedge \neg d) \Rightarrow [(c \vee \neg d) \vee (\neg a \Rightarrow d)]$.

V obou případech dosadíme do formule pravdivostní hodnoty výroků a postupně formuli zjednodušujeme.

a) $(\neg a \Rightarrow b) \vee (c \wedge \neg d) \vee (a \Leftrightarrow d)$

$(\neg 1 \Rightarrow 1) \vee (0 \wedge \neg 0) \vee (1 \Leftrightarrow 0)$

$(0 \Rightarrow 1) \vee (0 \wedge 1) \vee 0$

$1 \vee 0 \vee 0$

1

Pravdivý výrok

b) $(a \wedge \neg d) \Rightarrow [(c \vee \neg d) \vee (\neg a \Rightarrow d)]$

$(1 \wedge \neg 0) \Rightarrow [(0 \vee \neg 0) \vee (\neg 1 \Rightarrow 0)]$

$(1 \wedge 1) \Rightarrow [(0 \vee 1) \vee (0 \Rightarrow 0)]$

$1 \Rightarrow [1 \vee 1]$

$1 \Rightarrow 1$

1

Pravdivý výrok

Př. 6: Neguj výroky.

a) Všechno nebo nic.
b) Žádný strom neroste do nebe.
c) Jestli se rozzlobíme, budeme zlí.
d) Nežere maso, nepozná vtip.
e) Všichni už jsou v Mexiku.
f) Na každého jednou dojde.

a) Všechno nebo nic.
Nevšechno a nenic.

b) Žádný strom neroste do nebe.
Existuje alespoň jeden strom rostoucí do nebe.

c) Jestli se rozzlobíme, budeme zlí.
Rozzlobíme se a nebudeme zlí.

d) Nežere maso, nepozná vtip.
Žere maso nebo pozná vtip.

e) Všichni už jsou v Mexiku.
Alespoň jeden není v Mexiku.

f) Na každého jednou dojde.

Existuje jeden, na kterého nedojde.

Př. 7: V tabulce jsou uvedeny pravdivostní hodnoty složeného výroku sestaveného z výroků *a*, *b*. Vyjádři tento výrok formulí.

a	***b***		
1	1	0	
1	0	1	
0	1	1	
0	0	0	

Ve sloupci jsou dvě jedničky a dvě dvojky $\Rightarrow$ jde o ekvivalenci. Hledaný výrok je pravdivý, když jsou pravdivostní hodnoty výroků *a*, *b* rozdílné $\Rightarrow$ jeden z výroků znegujeme, aby byla v těchto případech ekvivalence pravdivá.

a	***b***	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \Leftrightarrow b$	$a \Leftrightarrow \neg b$
1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0

Shrnutí: