1.4.8 Logická stavba matematiky, důkazy

Předpoklady: 1407

Pedagogická poznámka: Tato hodina se velmi liší od většiny ostatních, neboť jde v podstatě o přednášku. Také ji neprobíráme v prvním ročníku, ale přednáším ji (vyjde téměř na dvě hodiny) až maturantům před maturitou. V prvním ročníku si pouze projdeme první část hodiny k místu, kde se začnou rozebírat jednotlivé druhy důkazů.

Matematické vyjadřování musí být přesné a jednoznačné $\Rightarrow$ jsou stanovena jasná pravidla, jak formulovat a objevovat matematická pravidla.

Definice

- vymezení pojmu pomocí základních pojmů nebo pojmů definovaných dříve. Neříkají nic nového, jen zkracují vyjadřování (a komplikují pochopení lidem, kteří nejsou z oboru a definice neznají).
Příklad: Prvočíslo je číslo dělitelné pouze jedničkou a sebou samým.
Od tohoto okamžiku nemusíme říkat " číslo dělitelné pouze jedničkou a sebou samým", ale můžeme používat jenom jedno slovo "prvočíslo".
Problémy:

- Jak vysvětlit základní pojmy (co je číslo?)
- Je nutné znát význam pojmů definovaných dříve (co znamená je dělitelné?).

Axiom

- tvrzení (výrok), které považujeme za pravdivé.
Dříve proto, že se „zdálo samozřejmé“, dnes proto, že jsme „si ho zvolili a zkoumáme, co to udělá“.
Například: Každým bodem roviny lze s danou přímkou vést právě jednu rovnoběžku (legendární pátý Euklidův postulát).
Poznámky:

- I na první pohled divné axiomy se mohou ukázat užitečné v reálném světě (neeuklidovské geometrie)
- Na tom, jaký si vybereme soubor axiomů a základních pojmů, závisí jakou část matematiky dostaneme.
- Není možné si vybrat všechno jako axiom. Soubor axiomů by měl být, co nejmenší a musí být bezesporný (axiomy si nesmí navzájem odporovat).

Matematická věta

- tvrzení (výrok), který jsme sestavili z pojmů a který nepatří mezi axiomy $\Rightarrow$ musíme se přesvědčit o jeho pravdivosti (**dokázat ho**).
Poznámka: V každé matematické teorii lze sestavit věty, které není možno pomocí původní sady axiomů dokázat (rozhodnout o jejich pravdivosti) bez toho, abych přidali další axiom (čím sice problematickou větu dokážeme, ale opět přibudou další zformulovatelné věty a vracíme se na začátek).
Poznámka: Toto je principiální rozdíl mezi matematikou a přírodními vědami. V matematice víme (díky důkazům a díky výběru axiomů), co je pravda a co ne. V přírodních vědách

neznáme správné řešení (možná dokonce ani neexistuje) a vše, co v každém okamžiku víme, je pouhé přiblížení, jehož vhodnost nelze dokázat, ale pouze ji podpořit nebo ji vyvrátit.

Důkaz

- úvaha, která zdůvodňuje platnost matematické věty. $\Rightarrow$ Pro různé druhy matematických vět (výroků), existují různé druhy důkazů.

Jak to funguje si ukážeme na axiomatickém zavedení geometrie (první matematická učebnice Základy od Eukleida - první matematická učebnice).

Zavedení geometrie

Nejdříve definice základních pojmů (celkem 23 definic):

1. Bod je to, co nemá části.
2. Čára je délka bez šířky.
3. Hranice čáry jsou body.
4. Úsečka je čára, která je vůči bodům na ni ležícím umístěna rovně.
5. Plocha je to, co má pouze délku a šířku.
6. ...

Poté postuláty (axiomy):

1. Můžeme vytvořit úsečku, která spojuje dva dané body.
2. Danou úsečku na jedné i druhé straně můžeme libovolně prodloužit.
3. Můžeme vytvořit kruh o daném středu, na jehož obvodě leží daný bod.
4. Všechny pravé úhly jsou si rovny.

Učebnice ještě obsahuje pátý postulát (je odlišný od ostatních, daleko složitější):

5. K dané přímce a bodu, který na ní neleží, lze sestrojit právě jednu rovnoběžku, která prochází daným bodem.

Dodatek: V Základech je postulát uveden v jiném ekvivalentním znění: " Jestliže úsečka protíná dvě úsečky tak, že na jedné straně je součet vnitřních přilehlých úhlů menší než dva pravé úhly, pak lze na této straně úsečky prodloužit tak, aby se tato jejich prodloužení protla." (ekvivalentních znění existuje více).

Pak obecné zásady (zřejmé pravdy v ideálním světě):

1. Veličiny témuž rovné jsou si rovny i navzájem.
2. Když se přidají veličiny rovné k rovným, i celky se rovnají.
3. Odejmou-li se od rovných rovné, zbývající části jsou si rovny.
4. Když se přidají veličiny rovné k nerovným, i celky se nerovnají.
5. Dvojnásobky téhož se navzájem rovnají.
6. Poloviny téhož se navzájem rovnají.
7. Co se navzájem překrývá, navzájem se rovná.
8. Celek je větší než část.
9. Dvě samotné úsečky žádný útvar neohraničují.

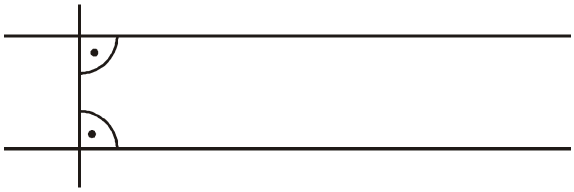
Následují formulace a důkazy jednotlivé věty. K jednoduchým větám na počátku nepotřebujeme pátý postulát:

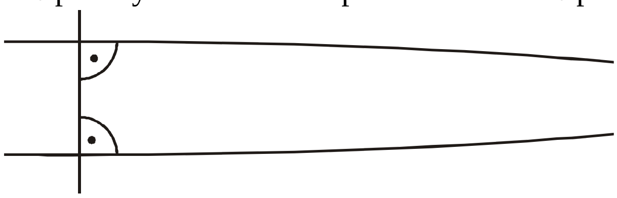
- konstrukce rovnostranného trojúhelníku,
- konstrukce shodné úsečky,
- odečtení úsečky,

- ...

Existují i věty, které pátý postulát vyžadují. Například: "Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je $180°$".
Dlouho se matematici snažili dokázat, že pátý postulát je zbytečný a je možné ho dokázat ze zbývajících. Nikdy se to nepodařilo $\Rightarrow$ změna postulátu $\Rightarrow$ nové typy geometrií, které vedou k odlišným změním některých vět (například věty o součtu úhlů v trojúhelníku).
Současný stav:

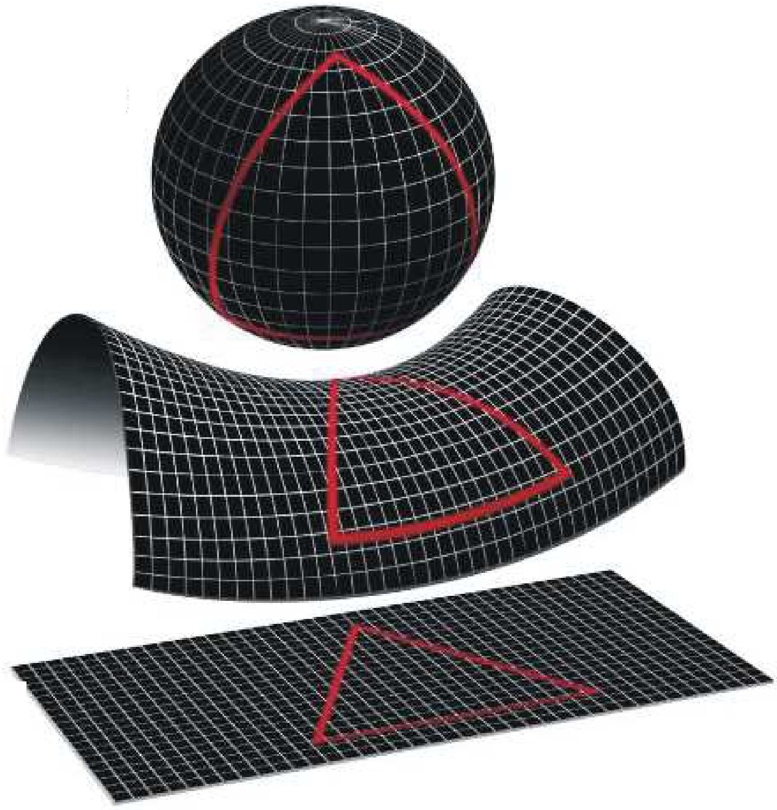
- K dané přímce a bodu, který na ní neleží, lze sestrojit právě jednu rovnoběžku, která prochází daným bodem $\Rightarrow$ **klasická Eukleidovská geometrie**:
  - geometrie na rovině,
  - součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je $180°$,
  - dvě přímky kolmé ke třetí přímce jsou rovnoběžné, "mají stále stejnou vzdálenosti",

    
  - ...
- K dané přímce a bodu, který na ní neleží, nelze sestrojit žádnou rovnoběžku, která prochází daným bodem $\Rightarrow$ **eliptická geometrie**:
  - geometrie na kouli,
  - součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je větší než $180°$,
  - dvě přímky kolmé ke třetí přímce "se k sobě přibližují",

    
  - ...
- K dané přímce a bodu, který na ní neleží, lze sestrojit nekonečně mnoho rovnoběžek, které prochází daným bodem $\Rightarrow$ **hyperbolická geometrie**:
  - geometrie na sedle,
  - součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je menší než $180°$,
  - dvě přímky kolmé ke třetí přímce "se od sebe vzdalují",

    
  - ....

Rovnostranný trojúhelník narýsovaný ve všech tech druzích geometrie.



Dodatek: Obrázek stažen z http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:End_of_universe.jpg.

Dodatek: Dlouho se myslelo, že neeuklidovské geometrie jsou matematickou vymyšleností, která nemá mnoho společného s realistou. Na počátku dvacátého století se zakřivená geometrie v obecné teorii relativity ukázala jako správný popis našeho vesmíru, jehož prostor je zakřiven gravitací.

Typy důkazů

Poznámka:
Ve zbytku článku budeme značit větu (výrok), kterou chceme dokázat jako ***v***.
Ve zbytku článku budeme používat klasickou tabulku pravdivostních hodnot implikace.

a	***b***	$a \Rightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

1. Důkazy matematických vět, které mají tvar elementárního výroku

- „jednoduché věty, bez spojek“

Příklady:

- Součet velikostí všech vnitřních úhlů v trojúhelníku je $180°$.
- $\sqrt{2}$ je iracionální číslo.

Dvě hlavní metody:

1. a) Přímý důkaz věty mající tvar elementárního výroku.

Princip důkazu vychází z tabulky pravdivostních hodnot implikace:

a	***v***	$a \Rightarrow v$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Máme výrok ***v***: „Součet velikostí všech vnitřních úhlů v trojúhelníku je $180°$.“
Postup důkazu:

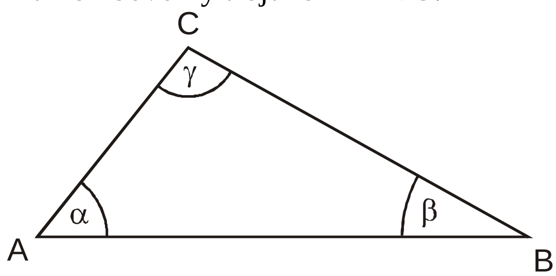
- Najdeme pravdivý výrok ***a*** (mezi axiomy nebo mezi již dokázanými výroky), vystavíme od výroku ***a*** pravdivou implikaci (cestu) k výroku ***v*** (tedy najdeme pravdivý výrok $a \Rightarrow b$).
- Víme, že v tabulce pravdivostních hodnot implikace $a \Rightarrow v$ se nacházíme v červeném řádku (je jediný s jedničkou v prvním a třetím sloupci).
- V červeném řádku se podíváme do druhého sloupce, je zde 1 a tedy výrok ***v*** je nutně pravdivý a tedy dokázaný.

Poznámky:

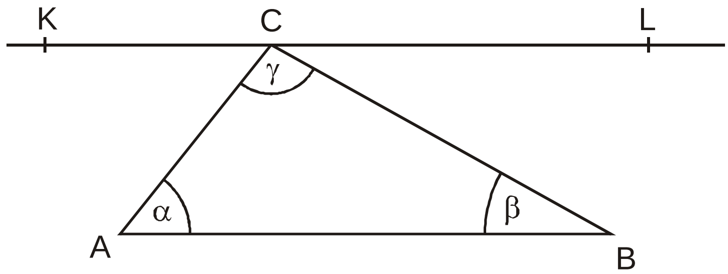
- Většinou se implikace $a \Rightarrow v$ nedá ukázat přímo, ale pouze postupně pomocí řetězce implikací: $a \Rightarrow b_1$, $b_1 \Rightarrow b_2$, $b_2 \Rightarrow b_3$, ... $b_{n-1} \Rightarrow b_n$, $b_n \Rightarrow v$)
- Není možné dokázat pravdivost výroků tím, že z něj odvodíme pravdivý výrok (věděli bychom, že platí ***b*** a $v \Rightarrow b$, tedy, že máme jedničku v druhém a třetím sloupci, takové řádky jsou v tabulce dvě a mají různé pravdivosti v prvním řádku (náš výrok, ze kterého jsme vycházeli, tedy může být jak pravdivý tak nepravdivý).
- Při konstrukci důkazu bývá velkým problémem zvolit vhodně výchozí výrok, aby bylo možné odvozováním dojít k požadované větě.

Př. 1: Dokaž větu: „Součet velikostí všech vnitřních úhlů v trojúhelníku je $180°$.“

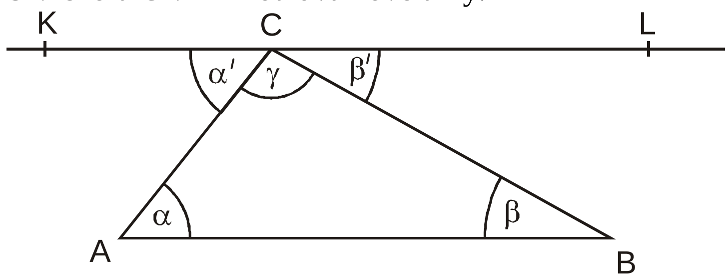
Máme výrok ***v***: „Součet velikostí všech vnitřních úhlů v trojúhelníku je $180°$.“
Hledáme vhodný výrok ***a***.
Máme libovolný trojúhelník *ABC*:



Zvolíme výrok ***a***: Každým bodem v rovině lze vést pouze jednu rovnoběžku s danou přímkou.
Povedeme bodem *C* rovnoběžku *KL* s přímkou *AB*.



Následuje odvozování (sled výroků $a \Rightarrow b_1$, $b_1 \Rightarrow b_2$, $b_2 \Rightarrow b_3$, ... $b_{n-1} \Rightarrow b_n$, $b_n \Rightarrow v$).
U vrcholu C vzniknou dva nové úhly.



Podle věty o rovnoběžkách proťatých přímkou platí: $\alpha' = \alpha$ a $\beta' = \beta$ (střídavé úhly).
Úhel $\measuredangle KCL$ je přímý, platí $180° = \alpha' + \gamma + \beta' = \alpha + \gamma + \beta$.
Trojúhelník ABC jsme zvolili libovolně, podařilo se nám dojít až k výroku $b_n \Rightarrow v$ a tím dokázat pravdivost výroku $\boldsymbol{v}$.

1. b) Důkaz sporem věty mající tvar elementárního výroku

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$a \Rightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Vyjdeme ze čtvrtého řádku, platí-li implikace $a \Rightarrow b$ (vyvozujeme správně) a neplatí-li výrok ***b***, máme ve druhém sloupci 0 a ve třetím 1 a jsme tedy ve čtvrtém řádku tabulky a neplatí tedy ani výrok ***a***.
Tabulku upravíme takto:

$\neg v$	$\boldsymbol{b}$	$a \Rightarrow b$	v
1	1	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Místo výroku ***a*** použijeme negaci výroku ***v***, pokud dokážeme, že tato negace je nepravdivá, znamená to, že původní výrok ***v*** je pravdivý.

Postup důkazu:

- Vytvoříme negaci $\neg v$ požadovaného výroku ***v***.
- Pravdivě z tohoto výroku dokazujeme, až dojdeme k nesmyslnému výroku ***b***.
- Nacházíme se ve čtvrtém řádku a tedy výrok $\neg v$ je nepravdivý.
- Výrok ***v*** je pravdivý.

Př. 2: Dokaž větu: „Šachovnici 8x8, ze které je vystřiženo levé dolní a pravé horní políčko, nelze pokrýt 31 obdélníky 2x1.“ (Pokrytím rozumíme takové umístění obdélníčků na šachovnici, aby každé její pole bylo přikryto právě jedním ze dvou čtverců obdélníčku 2x1.)

Máme výrok ***v***: „Šachovnici 8x8, ze které je vystřiženo levé dolní a pravé horní políčko, nelze pokrýt 31 obdélníky 2x1.“
Musíme vycházet z negace $\neg v$ dokazovaného výroku: „Šachovnici 8x8, ze které je vystřiženo levé dolní a pravé horní políčko, lze pokrýt 31 obdélníky 2x1.“
Snažíme se z negace dovodit spor (zřejmý nesmysl).

Obdélník 2x1 pokryje vždy jedno černé a jedno bílé políčko $\Rightarrow$ 31 obdélníků pokryje 31 bílých a 31 černých políček $\Rightarrow$ na šachovnici s vystřiženými políčky je stejně černých i bílých políček = **spor**, protože ze šachovnice jsme vystřihli dvě políčka na stejné úhlopříčce, tedy se stejnou barvou.
Z negovaného výroku $\neg v$ jsme odvodili zjevný nesmysl $\Rightarrow$ výrok $\neg v$ je nepravdivý $\Rightarrow$ výrok ***v*** je pravdivý.
Dokázali jsme větu: „Šachovnici 8x8, ze které je vystřiženo levé dolní a pravé horní políčko, nelze pokrýt 31 obdélníky 2x1.“

Poznámka:
Některé matematické teorie používají logiku, která zakazuje použití důkazu sporem.

2. Důkazy matematických vět, které mají tvar implikace

- souvětí typu: „Jestliže …., pak….“

Příklady:
- Je dána kružnice *k* s průměrem *AB*. Je-li *X* libovolný bod kružnice *k* různý od bodů *A*, *B*, pak úhel *AXB* je pravý.
- Je dán trojúhelník *ABC*. Je-li úhel *ACB* pravý, pak bod *C* leží na kružnici s průměrem *AB*.
- Pro všechna přirozená čísla *n* platí: jestliže je číslo n^2 sudé, je sudé i číslo *n*.

Výrok ***v***, který dokazujeme je složený výrok $a \Rightarrow b$, nedokazujeme tedy platnost samotných výroků *a* nebo *b*, ale pravdivost implikace („šipky“ tedy vyplývání výroku *b* z výroku *a*).

Tři hlavní metody:
2. a) Přímý důkaz věty mající tvar implikace

Princip:
Máme výrok $a \Rightarrow b$**,** nejsme si jisti pravdivostí šipky – nahradíme dokazovanou implikaci řetězcem implikací: $a \Rightarrow b_1$, $b_1 \Rightarrow b_2$, $b_2 \Rightarrow b_3$, … $b_{n-1} \Rightarrow b_n$, $b_n \Rightarrow b$.

Postup důkazu:
- Vezmeme si výrok ***a*** a začneme z něj postupně pravdivě pomocí axiomů a již dokázaných vět vyvozovat další výroky.
- Snažíme se dokazovat výroky, ze kterých by bylo možné dokázat výrok *b*.

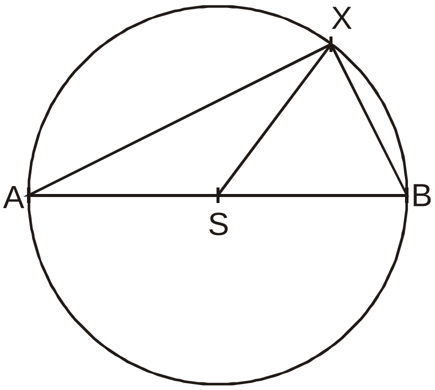
- Pokud najdeme výrok, ze kterého již vyplývá výrok *b*, podařilo se nahradit implikaci $a \Rightarrow b$ řetězcem implikací: $a \Rightarrow b_1$, $b_1 \Rightarrow b_2$, $b_2 \Rightarrow b_3$, … $b_{n-1} \Rightarrow b_n$, $b_n \Rightarrow b$ a tím větu dokázat.

Poznámka:
Konstrukce důkazu je oproti důkazům elementárních výroků jednodušší, protože je jasné, ze kterého výroku máme vycházet. Vycházíme vždy z výroku *a*.

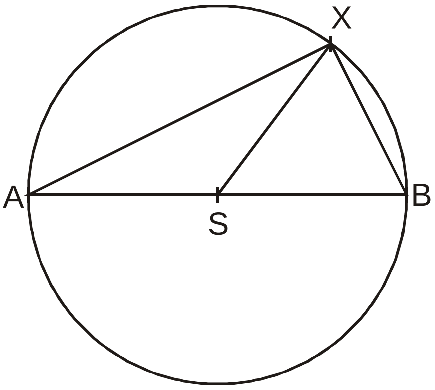
Př. 3: Je dána kružnice *k* s průměrem *AB*. Dokaž větu: „Je-li *X* libovolný bod kružnice *k* různý od bodů *A*, *B*, pak úhel *AXB* je pravý.“

Vyjdeme z výroku *a*: „*X* je libovolný bod kružnice *k* různý od bodů *A*, *B*.“ a budeme se snažit dojít k výroku *b*: „úhel *AXB* je pravý.“.

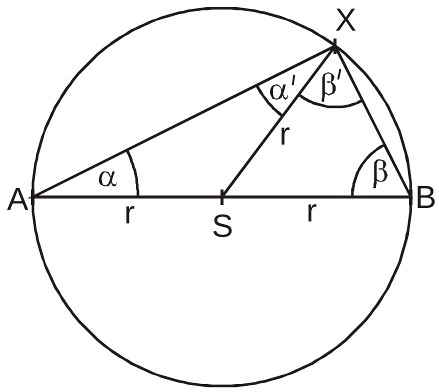
Nakreslíme kružnici *k* a zvolíme bod *X*. Nakreslíme trojúhelník *ABX*.



Nakreslíme střed *S* kružnice *k* a trojúhelníky *ASX* a *BSX*.



Trojúhelníky *ASX* a *BSX* jsou oba rovnoramenné (mají dvě strany o délce *r*) a proto platí: $\alpha = \alpha'$´a $\beta = \beta'$.



Součet úhlů v trojúhelníku je $180°$, tedy $\alpha + (\alpha' + \beta') + \beta = \alpha' + (\alpha' + \beta') + \beta = 180°$

$2\alpha' + 2\beta' = 180°$

$\alpha' + \beta' = \measuredangle AXB = 90°$.

Věta je dokázána.

2. b) Důkaz sporem věty mající tvar implikace

Princip:
Zcela stejný, jako u důkazu sporem u elementárních výroků, pouze vytvoření negace je trochu složitější, Negujeme složený výrok $a \Rightarrow b$ na $a \wedge \neg b$.

Postup důkazu:

- Vytvořím negaci $a \wedge \neg b$ požadovaného výroku $a \Rightarrow b$.
- Pravdivě z tohoto výroku dokazujeme až dojdeme k nesmyslnému výroku ***c***.
- Výrok $a \wedge \neg b$ je tedy nepravdivý.
- Výrok $a \Rightarrow b$ je pravdivý.

Poznámka:
Předpokladem úspěchu je správné znegování dokazovaného výroku.

Př. 4: Dokaž větu: „Pro všechna přirozená čísla *n* platí: jestliže je číslo n^2 sudé, je sudé i číslo *n*.

Určíme elementární výroky v implikaci $a \Rightarrow b$ **:**

- výrok *a*: číslo n^2 je sudé,
- výrok *b*: číslo *n* je sudé,

Znegujeme dokazovaný výrok $a \Rightarrow b$ na výrok $a \wedge \neg b$: Číslo n^2 je sudé a zároveň číslo *n* je liché.

Negaci dokončíme znegováním kvantifikátoru:
„Existuje alespoň jedno přirozené číslo *n*, pro které platí: číslo n^2 sudé a zároveň číslo *n* je liché.“

Z této věty potřebujeme dojít ke sporu.
Číslo *n* je liché, tedy dá se napsat ve tvaru: $n = 2k + 1$, kde *k* je celé číslo.

Pro n^2 platí: $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$, to je ale spor s tvrzením, že n^2 je sudé protože číslo $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ je zjevně liché.

Vycházeli jsme z nepravdivého výroku $a \wedge \neg b$, tedy původní výrok $a \Rightarrow b$ je pravdivý.

2. c) Nepřímý důkaz věty mající tvar implikace

Princip:
Implikace $a \Rightarrow b$ je ekvivalentní výrok s obměněnou implikací $\neg b \Rightarrow \neg a$.

a	b	$a \Rightarrow b$	$\neg b$	$\neg a$	$\neg b \Rightarrow \neg a$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

Pokud dokážeme platnost implikace $\neg b \Rightarrow \neg a$ musí platit i $a \Rightarrow b$.

Postup důkazu:
- Vytvoříme obměněnou implikací $\neg b \Rightarrow \neg a$ požadovaného výroku $a \Rightarrow b$.
- Výrok $\neg b \Rightarrow \neg a$ dokážeme (nejčastěji přímým důkazem).
- Výrok $\neg b \Rightarrow \neg a$ je tedy pravdivý.
- Výrok $a \Rightarrow b$ je pravdivý.

Poznámka:
Předpokladem úspěchu je správné vytvoření obměněné implikace.

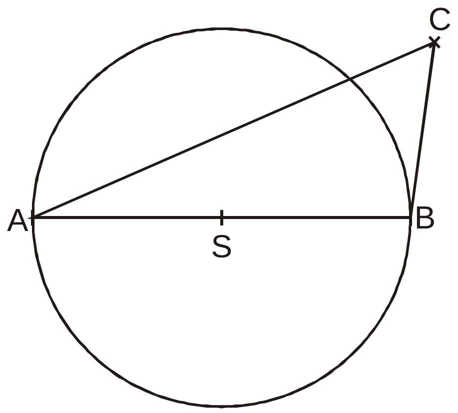
Př. 5: Je dán trojúhelník *ABC*. Dokaž větu: „Je-li úhel *ACB* pravý, pak bod *C* leží na kružnici s průměrem *AB*.“

Určíme elementární výroky v implikaci $a \Rightarrow b$**:**
- výrok *a*: úhel *ACB* je pravý,
- výrok *b*: bod *C* leží na kružnici s průměrem *AB*.

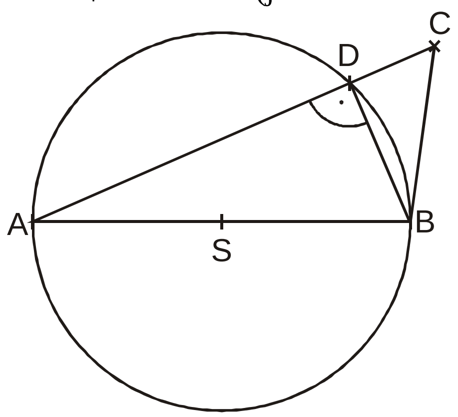
Obměníme dokazovaný výrok $a \Rightarrow b$ na výrok $\neg b \Rightarrow \neg a$: Pokud bod *C* neleží na kružnici s průměrem *AB*, úhel *ACB* není pravý.

Tuto větu dokazujeme.

Nakreslíme trojúhelník *ABC*, kružnici s poloměrem *AB* a bod *C*, který leží vně kružnice (aby ležel mimo kružnici, zbývá ještě vyřešit možnost, že bod *C* je uvnitř kružnice).

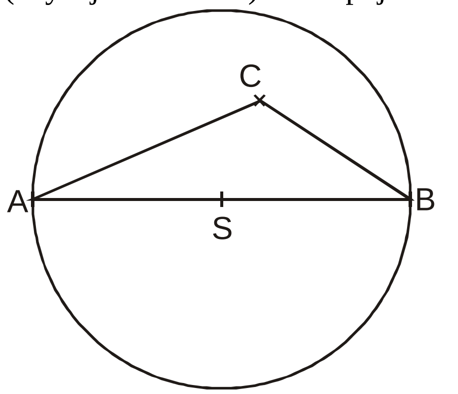


Průsečík úsečky *AC* s kružnicí *k* označíme *D*.
Úhel $\measuredangle ADB = 90°$ (již dokázaná věta).

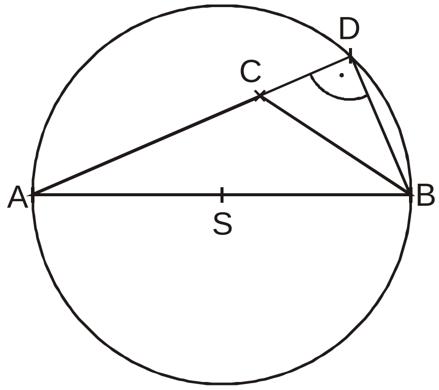


Úhel $\measuredangle BDC = 90°$ (je protější k úhlu $\measuredangle ADB = 90°$).
Úhel $\measuredangle ACB$ nemůže být pravý, protože v trojúhelníku *BDC* by byly dva pravé úhly.

Nakreslíme trojúhelník *ABC*, kružnici s poloměrem *AB* a bod *C*, který leží uvnitř kružnice (zbývající možnost). Postupujeme stejně jako v předchozím případě.



Průsečík úsečky *AC* s kružnicí *k* označíme *D*.
Úhel $\measuredangle ADB = 90°$ (již dokázaná věta).



Úhel $\measuredangle BCD < 90°$ aby v trojúhelníku *BCD* nebyly dva pravé úhly.
(je protější k úhlu $\measuredangle ADB = 90°$).
Úhel $\measuredangle ACB > 90°$ (zbytek do $180°$).

Věta $\neg b \Rightarrow \neg a$ je pravdivá tedy je pravdivá i věta $a \Rightarrow b$.

3. Důkazy matematických vět, které mají tvar ekvivalence

- souvětí typu: „…, právě tehdy, když…“

Příklady:

- V rovině je dána úsečka *AB*. Pro libovolný bod *X* roviny platí, že leží na ose úsečky *AB* právě tehdy, když je jeho vzdálenost od bodů *A* i *B* stejná.
- Pro všechna reálná čísla platí: $x \geq 0$ právě tehdy, když $x - |x| = 0$.

Výrok ***v***, který dokazujeme je složený výrok $a \Leftrightarrow b$, nedokazujeme tedy platnost samotných výroků *a* nebo *b*, ale pravdivost ekvivalence („oboustranné šipky“ tedy ekvivalentnosti výroků *a* a *b*).

a	***b***	$a \Leftrightarrow b$	$a \Rightarrow b$	$b \Rightarrow a$	$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1

Z tabulky je vidět, že výrok $a \Leftrightarrow b$ má stejnou pravdivostní hodnotu jako výrok $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$. Stačí tedy dokázat pravdivost výroku $a \Rightarrow b$ (věta ve tvaru implikace) a výroku $b \Rightarrow a$ (opět věta ve tvaru implikace). Důkaz věty ve tvaru ekvivalence tak převedeme na dva důkazy vět implikačních.

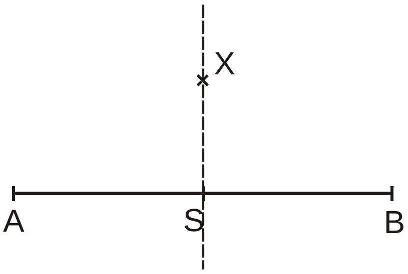
Př. 6: V rovině je dána úsečka *AB*. Dokaž, že pro libovolný bod *X* roviny platí: „Bod *X* leží na ose úsečky *AB* právě tehdy, když je jeho vzdálenost od bodů *A* i *B* stejná.

Dokazujeme větu ve tvaru: $a \Leftrightarrow b$.

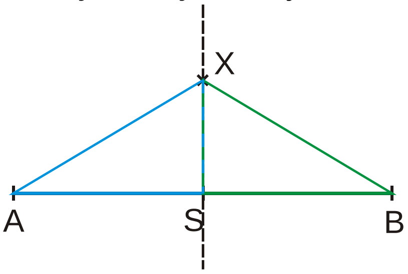
- Výrok *a*: Bod *X* leží na ose úsečky *AB*.
- Výrok *b*: Vzdálenost bodu *X* od bodů *A*, *B* je stejná.

Nejdříve dokazujeme výrok $a \Rightarrow b$: „Pro libovolný bod *X* roviny platí: „Jestliže bod *X* leží na ose úsečky *AB* pak je jeho vzdálenost od bodů *A* i *B* stejná.“

Zvolíme metodu přímého důkazu:
Nakreslíme obrázek situace:



Sestrojíme trojúhelníky *ASX* a *BSX*.



Oba trojúhelníky jsou shodné podle věty sus:

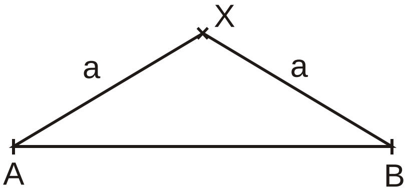
- společná strana *SX*
- pravé úhly $\sphericalangle ASX$ a $\sphericalangle BSX$ (osa úsečky je na ní kolmá)
- stejné strany *AS* a *BS* (osa úsečky prochází jejím středem)

$\Rightarrow$ musí mít shodné všechny strany $\Rightarrow$ strany *XA* a *XB* jsou shodné $\Rightarrow$ vzdálenost bodu *X* od bodů *A*, *B* je stejná.

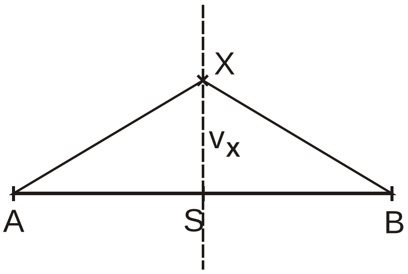
Nyní dokazujeme výrok $b \Rightarrow a$: „Pro libovolný bod *X* roviny platí: „Jestliže je vzdálenost od bodů *A* i *B* stejná, pak bod *X* leží na ose úsečky *AB*.“

Zvolíme metodu přímého důkazu:
Vzdálenost bodu *X* od bodů *A* a *B* je stejná, jsou dvě možnosti:

- bod *X* leží na úsečce $\Rightarrow$ musí být jejím středem a tedy leží na její ose.
- bod *X* neleží na úsečce $\Rightarrow$ můžeme sestrojit trojúhelník *ABX*



trojúhelník *ABX* je rovnoramenný $\Rightarrow$ jeho výška v_X prochází středem základny *AB* a je její osou $\Rightarrow$ bod *X* leží na ose úsečky *AB*.



Věta je dokázána.

Shrnutí: Metody dokazování úzce souvisí s vlastnostmi složených výroků.