1.5.1 Číselné soustavy I

Předpoklady: základní početní operace

Pedagogická poznámka: Tato a následující hodina není součástí klasické gymnaziální sady. Upřímně řečeno nevím proč. Jednak se všichni studenti určitě setkávají s pojmem binární (dvojkové) číselné soustavy, většina z nich potká i čísla v hexadecimální soustavě (například RGB barvy na pozadí www stránek). Na mnoha školách se navíc binární soustava učí v IVT (často však jenom jako algoritmus, jehož vnitřní fungování je zcela skryté). Obsah obou hodin je založených na poměrně jednoduché myšlence fungující za všech podmínek bez ohledu na základ číselné soustavy. Dá se vymýšlet spousta zajímavých příkladů, nebo snadno ověřit, jak hluboko žáci chápou některé zdánlivě zcela jasné postupy (sčítání pod sebe).

Pedagogická poznámka: U rozvinutého zápisu čísel v desítkové soustavě je třeba používat mocniny deseti (tedy 10^2 místo 100) kvůli využíti ve zbytku hodiny.

Dříve se čísla psala pomocí čárek, nebo i jiných znaků:
||| = 3
$\Rightarrow$ problém u větších čísel.
Co je ? ||||||||||||||||||||||||||||||||| - 33, ale strašně špatně se to čte.

$\Rightarrow$ Čísla můžeme seskupovat do skupin, abychom zápis snadněji přečetli.
Zapisování piv v hospodě do skupin po pěti: ~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ||| $\Rightarrow$ $3\cdot 5+3=18$.

Dnes zapisujeme čísla pomocí skupin založených na mocninách 10 (**desítková číselná soustava).**
21 neznamená: $2+1=3$
ale: $21 = 2\cdot 10 + 1\cdot 1 = 20+1 = 21$ = **rozvinutý zápis čísla.**

Význam číslice záleží na pozici, ve které se nachází, nuly uvnitř čísla jsou důležité:
$830 = 8\cdot 10^2 + 3\cdot 10^1 + 0\cdot 10^0 = 8\cdot 100 + 3\cdot 10 + 0\cdot 1$
$803 = 8\cdot 10^2 + 0\cdot 10^1 + 3\cdot 10^0 = 8\cdot 100 + 0\cdot 10 + 3\cdot 1$
$83 = 8\cdot 10^1 + 3\cdot 10^0 = 8\cdot 10 + 3\cdot 1$

Poznámka: Pro každé $x \in R, x \neq 0$ platí: $x^0 = 1$. Proč si řekneme později.

Dodatek: Námi používaný způsob zápisu se někdy označuje jako plný poziční systém – význam každé číslice je určen její pozicí v čísle. Není možné sestavit takový systém bez nuly. Právě protože Římané nulu nepoužívali, je systém římských číslic z dnešního pohledu těžkopádný a nepřehledný (například pro 5, 50 i 500 se používají různé znaky, některá čísla je možné psát více způsoby, čísla lišící se o jedničku se zapisují zcela jinak, ...).

Pedagogická poznámka: Následující příklad je pro velkou většinu studentů zbytečný, ale těch několik se bez něj skoro neobejde.

Př. 1: Zapiš rozvinutý zápis čísel: 12054, 12504 a 7305049 v desítkové soustavě.

$12054 = 1\cdot 10^4 + 2\cdot 10^3 + 0\cdot 10^2 + 5\cdot 10^1 + 4\cdot 10^0$
$12504 = 1\cdot 10^4 + 2\cdot 10^3 + 5\cdot 10^2 + 0\cdot 10^1 + 4\cdot 10^0$
$7305049 = 7\cdot 10^6 + 3\cdot 10^5 + 0\cdot 10^4 + 5\cdot 10^3 + 0\cdot 10^2 + 4\cdot 10^1 + 9\cdot 10^0$

Jako základ mocnin nemusíme používat jen 10.
$\Rightarrow$ Pokud není jasné, že číslo je uvedeno v desítkové soustavě, píšeme jej takto: $(12054)_{10}$.

Pedagogická poznámka: Upozorněte studenty, že v následujících příkladech jde pochopení jednoduchého stále se opakujícího postupu. Ať si otestují svou schopnost pochycení algoritmu.

Dvojková (binární) soustava
Používáme mocniny 2 (použití v počítačích):
$2^0 = 1$
$2^1 = 2$
$2^2 = 4$
$2^3 = 8$
$2^4 = 16$
$2^5 = 32$ atd.
Co znamená $(1010)_2$? Zkusíme napodobit číslo $(1010)_{10}$.
Desítková soustava $\Rightarrow$ základem jsou mocniny desítky.

- $(1010)_{10} = 1\cdot 10^3 + 0\cdot 10^2 + 1\cdot 10^1 + 0\cdot 10^0 = 1000 + 0 + 10 + 0 = 1010$

Dvojková soustava $\Rightarrow$ základem jsou mocniny dvojky.

- $(1010)_2 = 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 1\cdot 8 + 0\cdot 4 + 1\cdot 2 + 0\cdot 1 = 10$

$\Rightarrow$

- Význam číslic 1010 závisí na použité číselné soustavě.
- Systém vyjadřování čísel je ve dvojkové soustavě stejný jako v soustavě desítkové.

Př. 2: Zapiš rozvinutý zápis čísla ve dvojkové soustavě $(101)_2$ a převeď jej do desítkové soustavy.

$(101)_2 = 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 1\cdot 4 + 0\cdot 2 + 1\cdot 1 = 5$

Př. 3: Převeď čísla z dvojkové soustavy do desítkové.
a) $(1111)_2$ b) $(10010)_2$ c) $(1011101)_2$

a) $(1111)_2 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15$
b) $(10010)_2 = 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 16 + 2 = 18$
c) $(1011101)_2 = 1\cdot 2^6 + 0\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 64 + 16 + 8 + 4 + 1 = 93$

Jak převést číslo obráceně (z desítkové do dvojkové)?
Zkusíme 5 (víme už, že to vyjde $(101)_2$).

Skupiny, které máme k dispozici:
$2^0 = 1$
$2^1 = 2$
$2^2 = 4$
$2^3 = 8$
$2^4 = 16$
$2^5 = 32$ atd.
Hledáme největší, kterou obsahuje i číslo 5. Je to skupina 4.
Platí $5 = 4 + 1 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0$.
Do rozvoje musíme doplnit i $0 \cdot 2^1$ (nuly mají v čísle význam):
$5 = 4 + 1 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (101)_2$.

Př. 4: Převeď čísla z desítkové soustavy do dvojkové:
a) $(7)_{10}$ b) $(8)_{10}$ c) $(11)_{10}$ d) $(14)_{10}$
e) $(32)_{10}$ f) $(29)_{10}$ g) $(57)_{10}$

a) $(7)_{10} = 4 + 2 + 1 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (111)_2$
b) $(8)_{10} = 8 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (1000)_2$
c) $(11)_{10} = 8 + 2 + 1 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (1011)_2$
d) $(14)_{10} = 8 + 4 + 2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (1110)_2$
e) $(32)_{10} = 32 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (100000)_2$
f) $(29)_{10} = 16 + 8 + 4 + 1 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (11101)_2$
f) $(57)_{10} = 32 + 16 + 8 + 1 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (111001)_2$

Pedagogická poznámka: Chci po žácích, aby převáděli bez kalkulaček, na kterých se někteří snaží si ulehčit odečítání. Příklady jsou schválně početně nenáročné, aby kromě zvládání algoritmu nemuseli žáci ještě příliš bojovat s odčítáním.

Pedagogická poznámka: Existují i efektivnější dělicí algoritmy (viz příští hodina). Bohužel z nich není tak snadno vidět, o co při převádění čísel do různých číselných soustav jde. Protože cílem hodin je ukázat, jak funguje převádění čísel do různých soustav, a ne naučení nejefektivnějšího převáděcího algoritmu z desítkové soustavy do soustavy dvojkové, tento algoritmus nezmiňujeme. V případě, že by cílem bylo naučit nejrychlejší metodu na převádění čísel, byl by takový algoritmus samozřejmě na místě (to ale není cíl, protože taková znalost je opravdu zbytečná). Pokud některý ze studentů přinese podobný algoritmus z domova, bavíme se o obsahu této poznámky se třídou. Jde také o to, že u postupů, jejichž pozadí chápeme, je daleko větší pravděpodobnost dlouhodobějšího zapamatování. V této souvislosti není od věci nic dalšího neříkat a po dvou, třech týdnech nechat studenty nějaké číslo převést. Uživatelé automatických postupů budou mít daleko menší úspěšnost než ostatní.

Pedagogická poznámka: Následující dva příklady zabaví rychlejší žáky, zatímco se pomalejší trápí s příkladem 4. Není dobré však dlouho čekat, aby z hodiny ještě něco zbylo.

Př. 5: Kolik různých číslic je třeba k vyjádření čísla ve dvojkové soustavě? Proč? Jaké výhody a jaké nevýhody má používání dvojkové soustavy?

Ve všech zápisech čísel ve dvojkové soustavě se vyskytují pouze 1 a 0.
V rozvoji nemůže být například $2\cdot 2^3$, protože platí $2\cdot 2^3 = 2^4$ (2^4 je větší skupina) $\Rightarrow$ kdybychom měli jakoukoliv skupinu dvakrát, získáme tím skupinu větší, protože používáme co největší skupiny $\Rightarrow$ Na zápis čísel ve dvojkové soustavě stačí pouze dvě číslice 0 a 1.
Výhody: jen dvě číslice.
Nevýhody: dlouhá čísla, špatná představa o velikosti čísla (je to však hlavně otázka zvyku).

Dvojková číselná soustava používá pro reprezentací čísel v počítačích. Číslo 1 znamená přítomnost napětí, O nepřítomnost napětí. Systém, kdy je nutno rozlišovat pouze dva stavy, je konstrukčně daleko jednodušší než systém, které musí rozlišovat stavů více.

Př. 6: Jak poznáme u čísel zapsaných ve dvojkové soustavě, že jsou sudá? Jak poznáme čísla dělitelná čtyřmi?

Sudé číslo: nejmenší skupina bude $1\cdot 2^1$ v rozvinutém zápisu se nevyskytuje člen $1\cdot 2^0$ $\Rightarrow$ zápis čísla končí nulou.
Podobně dělitelnost čtyřmi: nejmenší skupina bude $1\cdot 2^2$ v rozvinutém zápisu se nevyskytují členy $1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0$ $\Rightarrow$ zápis čísla končí dvěma nulami.

Zápis v dalších soustavách je podobný.

Př. 7: Převeď do desítkové soustavy čísla.
a) $(2010)_3$ b) $(141)_5$ c) $(161)_7$ d) $(27)_8$

a) $(2010)_3 = 2\cdot 3^3 + 0\cdot 3^2 + 1\cdot 3^1 + 0\cdot 3^0 = 2\cdot 27 + 1\cdot 3 = 57$
b) $(141)_5 = 1\cdot 5^2 + 4\cdot 5 + 1\cdot 5^0 = 1\cdot 25 + 4\cdot 5 + 1 = 46$
c) $(161)_7 = 1\cdot 7^2 + 6\cdot 7^1 + 1\cdot 7^0 = 1\cdot 49 + 6\cdot 7 + 1 = 49 + 42 + 1 = 92$
d) $(27)_8 = 2\cdot 8^1 + 7\cdot 8^0 = 2\cdot 8 + 7\cdot 1 = 23$

Pedagogická poznámka: Ukázka na převod z jiné než dvojkové soustavy není uvedena schválně a rovnou je zařazen příklad. Jde o to, aby si studenti uvědomili, že princip je stále stejný a nezávisí na základu používané soustavy. Stejně tak je to u následujícího příkladu. Pokud má někdo ze studentů s řešením těchto příklad problémy, vždy se snažím o to, aby zjistil, že je to „pořád to samé“.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je určen pro rychlejší studenty a ty, kteří si chtějí zapřemýšlet doma jako dobrovolný úkol. Více se tím budeme zabývat v příští hodině.

Př. 8: Převeď číslo $(21)_{10}$ z desítkové soustavy do soustavy trojkové.

$(21)_{10} = (\ )_3$

Skupiny, které máme k dispozici:
$3^0 = 1$
$3^1 = 3$
$3^2 = 9$
$3^3 = 27$
Největší skupina, kterou je možné sestavit z 21 je skupina 9, která se vyskytuje dvakrát $\Rightarrow$
$21 = 2 \cdot 9 + 3 \Rightarrow (21)_{10} = 2 \cdot 9 + 1 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0 = (210)_3$.

Shrnutí: Princip zápisu čísel v jiných soustavách je stejný jako v soustavě desítkové, měníme jen základ mocnin: $(101)_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 5$.