1.5.2 Číselné soustavy II

Předpoklady: 010501

Př. 1: Převeď do desítkové soustavy čísla.
a) $(1220)_3$ b) $(131)_4$ c) $(153)_6$

a) $(1220)_3 = 1\cdot 3^3 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3^1 + 0\cdot 3^0 = 1\cdot 27 + 2\cdot 9 + 2\cdot 3 = 51$

b) $(131)_4 = 1\cdot 4^2 + 3\cdot 4^1 + 1\cdot 4^0 = 1\cdot 16 + 3\cdot 4 + 1 = 29$

c) $(153)_6 = 1\cdot 6^2 + 5\cdot 6^1 + 3\cdot 6^0 = 1\cdot 36 + 5\cdot 6 + 3 = 36 + 30 + 3 = 69$.

Pedagogická poznámka: Je zajímavé, že i když v předchozí hodině třída dokázala převádět bez problémů, už první příklad této hodinu činí mnohým značné problémy $\Rightarrow$ je třeba si opět popovídat o tom, jak se vlastně snaží zapamatovat si věci, jestli to vůbec dělají a co si vlastně snažili zapamatovat.
Není to zbytečné, paměť je minimálně stejně významným důvodem neúspěchů v matematice, jako „logické myšlení“.
Je zajímavé (a zároveň depresivní) diskutovat o tom, co se snaží studenti zapamatovat. Většinou jde o úplné algoritmy včetně mocnin dvou nebo tří, často podstatně složitější a konkrétnější než vysvětlení, kterého se jim dostalo ode mě. Během diskuse zkoušíme zformulovat nějaká pravidla na zapamatování (je to sice práce pro každého zvlášť, ale podle něčeho se to studenti naučit musí).
Převést číslo do desítkové soustavy znamená napsat rozvinutý tvar s patřičnou mocninou a dopočítat ho.
Převést číslo z desítkové soustavy do jiné znamená vytvářet skupiny o počtech, které odpovídají základu soustavy.

Př. 2: Převeď číslo $(47)_{10} = (\ )_3$ z desítkové soustavy do soustavy trojkové.

Skupiny, které máme k dispozici:
$3^0 = 1$
$3^1 = 3$
$3^2 = 9$
$3^3 = 27$

Hledáme v čísle 47 trojkové skupiny:

- Skupinu 27 můžeme v čísle 47 najít jednou $\Rightarrow$ zbývá ještě rozdělit: $47 - 27 = 20$ (z tohoto počtu již nesestavíme skupinu o velikosti 27).
- Největší menší skupinou je skupina o velikosti 9, kterou ve zbývajících 20 najdeme dvakrát: $47 = 27 + 20 = 27 + 2\cdot 9 + 2$ $\Rightarrow$ zbývá ještě rozdělit 2.
- Skupinu o velikosti 3 ze zbývajících 2 nesestavíme ani jednu: $47 = 27 + 2\cdot 9 + 0\cdot 3 + 2$.
- Ze zbývajících dvou sestavíme dvě skupiny po jedné: $47 = 27 + 2\cdot 9 + 0\cdot 3 + 2\cdot 1$.

$(47)_{10} = 27 + 2\cdot 9 + 0\cdot 3 + 2\cdot 1 = 1\cdot 3^3 + 2\cdot 3^2 + 0\cdot 3^1 + 2\cdot 3^0 = (1202)_3$

Př. 3: Převeď čísla z desítkové soustavy do naznačené číselné soustavy.
a) $(61)_{10} = (\ )_3$ b) $(47)_{10} = (\ )_5$ c) $(84)_{10} = (\ )_8$

a) $(61)_{10} = (\ )_3$
Skupiny, které máme k dispozici:
$3^0 = 1$ $3^1 = 3$ $3^2 = 9$ $3^3 = 27$
$61 = 2\cdot 27 + 2\cdot 3 + 1 = 2\cdot 3^3 + 0\cdot 3^2 + 2\cdot 3^1 + 1\cdot 3^0 = (2021)_3$

b) $(47)_{10} = (\ )_5$
Skupiny, které máme k dispozici:
$5^0 = 1$ $5^1 = 5$ $5^2 = 25$ $5^3 = 125$
$47 = 25 + 22 = 25 + 4\cdot 5 + 2 = 1\cdot 5^2 + 4\cdot 5^1 + 2\cdot 5^0 = (142)_5$

c) $(84)_{10} = (\ )_8$
Skupiny, které máme k dispozici:
$8^0 = 1$ $8^1 = 8$ $8^2 = 64$
$(84)_{10} = 64 + 8 + 8 + 4 = 1\cdot 64 + 2\cdot 8 + 4\cdot 1 = 1\cdot 8^2 + 2\cdot 8^1 + 4\cdot 8^0 = (124)_8$

Kolik číslic budeme potřebovat pro zápis čísel ve trojkové soustavě?

Podobně jako u dvojkové stačí dvě číslice, stačí v trojkové pouze tři ($3\cdot 3^2 = 3^3$ větší skupina).
$\Rightarrow$ Základ číselné soustavy nám zároveň udává i počet číslic, potřebných zápisu čísel v této soustavě.

Šestnáctková (hexadecimální) soustava
$\Rightarrow$ Potřebujeme 16 číslic, ale máme jich pouze deset (víc nepotřebujeme, když normálně používáme jen deset čísli v desítkové soustavě.
Nejjednodušší řešení: Nebudeme zavádět nové znaky, použijeme znaky pro písmena (všichni je umíme a jsou uspořádány podle pořadí):
: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F ($A = 10$, $B = 11\ldots$).

Pedagogická poznámka: Už před příklady na převádění do šestnáctkové soustavy upozorňuji žáky, že dál budou pracovat samostatně nebo ve skupinách. Zvolit si mohou libovolný z posledních příkladů. Nechávám je pracovat samostatně, nejdříve dořeším s pomalejšími žáky převádění do šestnáctkové soustavy a pak pomáhám s koncovými příklady.

Př. 4: Převeď číslo $(2E)_{16}$ ze šestnáctkové do desítkové soustavy.

$(2E)_{16} = 2\cdot 16^1 + 14\cdot 1 = 46$

Př. 5: Převeď číslo $(63)_{10}$ z desítkové do šestnáctkové soustavy.

$(63)_{10} = 3\cdot 16 + 15 = (3F)_{16}$

Poznámka: Se šestnáctkovou soustavou setkáváme například při zápisu barev v html kódu (kód RGB například (E5, 78, FF), nebo u MAC adres (celosvětově jedinečný identifikátor síťových karet).

Př. 6: Jak se "pod sebou" sčítají čísla v jiných číselných soustavách než v soustavě desítkové? Demonstruj na součtu $(111)_3+(120)_3$. Zkontroluj správnost svého postupu.Čím se liší sčítání pod sebou v jiné soustavě od sčítání v soustavě desítkové?

Nejdříve si zopakujeme sčítání v desítkové soustavě: $\begin{array}{r} 453 \\ 582 \\ \hline \end{array}$.

- $3+2=5 \Rightarrow$ do řádu jednotek píšeme 5: $\begin{array}{r} 453 \\ 582 \\ \hline 5 \end{array}$,
- $8+5=13$, v každém řádu můžeme mít nejvíce devět skupin (deset skupin už tvoří skupinu vyššího řádu) $\Rightarrow$ z deseti desítkových skupin vytvoříme jednu stovkovou, zbývají tři desítkové skupiny $\Rightarrow$ do desítek píšeme 3 a pamatujeme si 1: $\begin{array}{r} 453 \\ 582 \\ \hline 35 \end{array}$,
- $4+5+1=10$, v každém řádu můžeme mít nejvíce devět skupin (deset skupin už tvoří skupinu vyššího řádu) $\Rightarrow$ z deseti stovkových skupin vytvoříme jednu tisícovou $\Rightarrow$ do stovek píšeme 0 a pamatujeme si 1: $\begin{array}{r} 453 \\ 582 \\ \hline 035 \end{array}$,
- pamatujeme si 1 $\Rightarrow$ do tisícovek píšeme 1: $\begin{array}{r} 453 \\ 582 \\ \hline 1035 \end{array}$.

Jediným momentem, ve kterém desítka ovlivňovala naše rozhodování, byly chvíle, kdy jsme sčítáním získali více než 10 a museli počet rozdělit na vytváření větších skupin $\Rightarrow$ ve trojkové soustavě budeme postupovat úplně stejně, ale ke sestavení skupiny vyššího řádu nám budou stačit už tři skupiny nižšího řádu.

Sčítáme $\begin{array}{r} 111 \\ 120 \\ \hline \end{array}$

- $1+0=1 \Rightarrow$ do řádu jednotek píšeme 1: $\begin{array}{r} 111 \\ 120 \\ \hline 1 \end{array}$,
- $1+2=3$, ze tří skupin už vytvoříme jednu skupinu vyššího řádu, žádná nezbývá $\Rightarrow$ píšeme 0 a pamatujeme si 1: $\begin{array}{r} 111 \\ 120 \\ \hline 01 \end{array}$,
- $1+1+1=3$, v, ze tří skupin už vytvoříme jednu skupinu vyššího řádu, žádná nezbývá $\Rightarrow$ píšeme 0 a pamatujeme si 1: $\begin{array}{r} 111 \\ 120 \\ \hline 001 \end{array}$,
- pamatujeme si 1 $\Rightarrow$ do píšeme 1: $\begin{array}{r} 111 \\ 120 \\ \hline 1001 \end{array}$.

Kontrola:
$(111)_3 = 1\cdot 3^2 + 1\cdot 3^1 + 1\cdot 3^0 = 9+3+1 = 13$

$(120)_3 = 1\cdot 3^2 + 2\cdot 3^1 + 0\cdot 3^0 = 9+6+0 = 15$

$(1001)_3 = 1\cdot 3^3 + 0\cdot 3^2 + 0\cdot 3^1 + 1\cdot 3^0 = 27+1 = 28$

$13+15 = 28 \Rightarrow$ kontrola vyšla.

Př. 7: Šestnáctková číselná soustava se používá stejně jako dvojková ve výpočetní technice. Ne však k přímému zápisu čísel uvnitř počítačů, ale jako soustava, která s malým počtem číslic umožňuje zapsat potřebné konstanty ve tvaru umožňujícím přímý a rychlý převod do dvojkové soustavy. Najdi postup, jak toto převádění provést. Které další soustavy umožňují přímý převod do dvojkové soustavy?

Zvolíme si nějaké číslo ve dvojkové soustavě a zkusíme jeho rozvinutý zápis upravit tak, aby obsahoval mocniny 16.

$(11011101)_2 = 1\cdot 2^7 + 1\cdot 2^6 + 0\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 =$

$= \left(1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\right)\cdot 2^4 + \left(1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot\right)\cdot 2^0 =$

$= \left(1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\right)\cdot 16^1 + \left(1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot\right)\cdot 16^0 =$

$= (8+4+0+1)\cdot 16^1 + (8+4+0+1)\cdot 16^0 = 13\cdot 16^1 + 13\cdot 16^0 = (\mathrm{DD})_{16}$

Vždy čtyři cifry čísla ve dvojkové soustavě odpovídají jedné cifře čísla v šestnáctkové soustavě.

Př. 8: Převod z desítkové do dvojkové (ale i libovolné jiné) číselné soustavy můžeme provést i pomocí dělícího algoritmu. Převáděné číslo vydělíme dvěma (nebo jiným číslem, které je základem soustavy, do které převádíme). Zbytek zapíšeme jako poslední cifru vyjádření ve dvojkové soustavě. Číslo, které jsme získali opět vydělíme a zbytek opět zapíšeme jako další cifru. Získaný podíl opět dělíme a opakujeme předchozí postup, dokud výsledkem dělení nebude nula. Od zadu zapsané zbytky tvoří vyjádření převáděného čísla ve dvojkové (jiné) soustavě.
Převeď pomocí dělícího algoritmu do dvojkové soustavy číslo 29 (výsledek převodu jsme určili v minulé hodině).
Vysvětli, proč algoritmus funguje.
Převeď podobný algoritmem číslo 29 do trojkové soustavy.

$29:2 = 14\,(\text{zb.}1) \Rightarrow (29)_{10} = (\quad 1)_2$

$14:2 = 7\,(\text{zb.}0) \Rightarrow (29)_{10} = (\quad 01)_2$

$7:2 = 3\,(\text{zb.}1) \Rightarrow (29)_{10} = (\quad 101)_2$

$3:2 = 1\,(\text{zb.}1) \Rightarrow (29)_{10} = (\quad 1101)_2$

$1:2 = 0\,(\text{zb.}1) \Rightarrow (29)_{10} = (11101)_2$

Kontrola:
$(11101)_2 = 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 16+8+4+1 = 29$

Jak to funguje?
Zkusíme dělit číslo v rozvinutém zápisu:

$29:2=\left(1\cdot 2^4+1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0\right):2$ - všechny členy v závorce dělíme dvěma, všechny mocniny dvou se zmenší, pouze poslední člen není dělitelný dvěma, číslo před mocninou 2 zůstane jako zbytek (a my ho zapíšeme na poslední místo vyjádření ve dvojkové soustavě).

$29:2=\left(1\cdot 2^4+1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0\right):2=1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+1\cdot 2^1+0\cdot 2^0\ (zb.1)=14(zb.1)$

V dalším kole dělíme modré číslo a tak dále.

$14:2=\left(1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+1\cdot 2^1+0\cdot 2^0\right):2=1\cdot 2^2+1\cdot 2^1+1\cdot 2^0\ (zb.0)=7(zb.0)$

Během dělení postupně zmenšujeme jednotlivé mocniny, nejmenší mocnina vždy skončí jako zbytek a přidá tak další cifru do zápisu čísla v dané číselné soustavě.

Převádění do trojkové soustavy bude fungovat úplně stejně, ale budeme dělit 3.

$29:3=9\,(\text{zb. }2)\ \Rightarrow\ (29)_{10}=(\quad 2)_3$

$9:3=3\,(\text{zb. }0)\ \Rightarrow\ (29)_{10}=(\ \ 02)_3$

$3:3=1\,(\text{zb. }0)\ \Rightarrow\ (29)_{10}=(\ 002)_3$

$1:3=0\,(\text{zb. }1)\ \Rightarrow\ (29)_{10}=(1002)_3$

Kontrola:

$(1002)_3=1\cdot 3^3+0\cdot 3^2+0\cdot 3^1+2\cdot 3^0=27+2=29$

Shrnutí: Při zápisu čísel využíváme jejich rozdělení na skupiny, které jsou postaveny na mocninách čísla, označeného jako základ soustavy.