1.5.3 Násobek a dělitel čísla

Předpoklady: 010502

Poznámka: Až do konce kapitoly budeme uvažovat pouze přirozená čísla.

Platí: $45 = 5 \cdot 9$ nebo $45 = 9 \cdot 5$
Rovnost můžeme vyjádřit i slovně:
45 je násobkem 5. 5 je dělitel 45.
45 je násobkem 9. 9 je dělitel 45.

Př. 1: Doplň větu, kde je předchozí skutečnost popsána obecně.
"Číslo *a* je násobkem čísla *b* (číslo *b* je dělitel čísla *a*) právě tehdy, když existuje přirozené číslo *k* takové, že …"

Číslo *a* je násobkem čísla *b* (číslo *b* je dělitel čísla *a*) právě tehdy, když existuje přirozené číslo *k* takové, že $a = k \cdot b$.

Píše se také: b/a (čteme: b dělí a).
Konkrétně: $5/30$ (čteme: 5 dělí 30.

Soudělná čísla mají společného dělitele většího než 1.
Nesoudělná čísla mají jediného společného dělitele - číslo 1.

Přirozená čísla můžeme zapisovat pomocí násobků jiných přirozených čísel:

Číslo	Pomocí násobku 2	Pomocí násobku 3	Pomocí násobku 4
1	2·0+1	3·0+1	4·0+1
2	2·1+0	3·0+2	4·0+2
3	2·1+1	3·1+0	4·0+3
4	2·2+0	3·1+1	4·1+0
5	2·2+1	3·1+2	4·1+1
6	2·3+0	3·2+0	4·1+2
13	2·6+1	3·4+1	4·3+1
…	…	…	…

Do tabulky bychom mohli napsat i další přirozená čísla.

Všechny přirozené čísla můžeme rozdělit do 2 skupin podle zbytku po dělení 2:
- zbytek 0 $\Rightarrow$ čísla zapsatelná ve tvaru $2k + 0 = 2k$ (sudá čísla),
- zbytek 1 $\Rightarrow$ čísla zapsatelná ve tvaru $2k + 1$ (lichá čísla).

Podobně pro 3 (ale tři skupiny):
- zbytek 0 $\Rightarrow$ čísla zapsatelná ve tvaru $3k + 0 = 3k$,
- zbytek 1 $\Rightarrow$ čísla zapsatelná ve tvaru $3k + 1$,
- zbytek 2 $\Rightarrow$ čísla zapsatelná ve tvaru $3k + 2$.

Pro 4 jsou čtyři skupiny: $4k$, $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$.

Pedagogická poznámka: Nechávám studenty opsat tabulku a pak je vyzvu, aby si prohlédli druhý sloupec pomocí násobku čísel 2. Sami přijdou na to, že se stále opakují pouze dva zbytky a je tedy možné rozdělit čísla do dvou skupin. Rozdělení podle zbytkových tříd 3 a čtyř pak udělají úplně sami.

Př. 2: Zapiš skupiny, do kterých můžeme rozdělit přirozená čísla podle zbytků po dělení pěti. Ke každé skupině napiš ta z čísel $\{10;2;9;26;155,48\}$, která do ní patří.

Při dělení šesti můžeme získat pět různých hodnot zbytku 0 až 4 $\Rightarrow$ skupiny:

- $5k$ - $\{10,155\}$,
- $5k+1$ - $\{26\}$,
- $5k+2$ - $\{2\}$,
- $5k+3$ - $\{48\}$,
- $5k+4$ - $\{9\}$.

Předchozí poznatek obecně
Každé přirozené číslo *n* lze pomocí přirozeného čísla $b>1$ vyjádřit jedním z výrazů:
$bk, bk+1, bk+2, ..., bk+(b-1)$, kde $k \in N_0$.
(stručnější zápis $n=bk+z$, kde $z \in \{0,1,...,b-1\}$.

Množině čísel, které můžeme každým takovým výrazem vyjádřit, se říká **zbytková třída** $\Rightarrow$ přirozená čísla je tedy možné podle zbytku po dělení dvěma rozdělit do dvou zbytkových tříd $2k$ a $2k+1$.

Př. 3: Platí $17=2\cdot 6+5$. Které z konkrétních čísel uvedených v předchozí rovnosti odpovídá jednotlivým písmenům z předchozí věty (*n*, *b*, *k*, *z*)?

17 je číslo, které rozkládáme na součin $\Rightarrow$ $n=17$.
5 je zbytek po dělení (proto označení *z*) $\Rightarrow$ písmeno $z=5$.
Čísla 2 a 6 vystupují v součinu $\Rightarrow$ jedno z nich je *b*, druhé *k*. Číslo *b* je číslo, které používáme k rozkladu na skupiny, musí být větši než největší zbytek $\Rightarrow$ platí $b=6$, $k=2$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad není zbytečný. Studenti mají často tendenci zcela ignorovat jakákoliv obecná tvrzení (viz hodina 010507). Jediný problém u předchozího příkladu nastává při určování hodnoty *b*, protože v součinu *kb* je oproti větě prohozeno pořadí (schválně). Kontrolu samozřejmě provádíme diskusí u tabule bez využití projektoru.

Pedagogická poznámka: Pojem zbytkové třídy neuvádím proto, aby se ho žáci museli učit. Nikdy ho nezkouším, ani nedávám do prověrek. Jde pouze o to, aby ho slyšeli, protože se s ním mohou setkat.

Př. 4: Zapiš pomocí proměnné $k \in N$ libovolné přirozené číslo dělitelné třemi.

Číslo dělitelné třemi, má při dělení třemi zbytek 0 $\Rightarrow$ můžeme ho zapsat $3k$.

Př. 5: Zapiš pomocí proměnné $k \in N_0$:
a) libovolné přirozené číslo, které při dělení třemi dává zbytek 2,
b) libovolné přirozené číslo, které při dělení čtyřmi dává zbytek 1.

a) libovolné přirozené číslo, které při dělení třemi dává zbytek 2
$3k+2$
b) libovolné přirozené, které při dělení čtyřmi dává zbytek 1.
$4k+1$

Př. 6: Popiš slovně množiny přirozených čísel zapsané výrazy:
a) $7k; k \in N$, b) $5k+2; k \in N_0$, c) $4k-1; k \in N$

a) $7k; k \in N$
Množina všech přirozených čísel dělitelných sedmi.

b) $5k+2; k \in N_0$
Množina všech přirozených čísel, které při dělení pěti dají zbytek 2.

c) $4k-1; k \in N$
$4k-1; k \in N$ $\Rightarrow$ k násobku nepřičítáme, ale odečítáme $\Rightarrow$ nejde o zbytkovou třídu $\Rightarrow$ od násobku čtyř odečítáme 1 $\Rightarrow$ získám číslo, které bude mít při dělení čtyřmi zbytek 3.
Množina všech přirozených čísel, které při dělení čtyřmi dají zbytek 3.

Př. 7: Napiš čtyři nejmenší přirozená čísla, která patří do zbytkové třídy:
a) $3k$, b) $4k+1$, c) $5k+4$.

a) $3k \Rightarrow M = \{3;6;9;12,...\}$

b) $4k+1 \Rightarrow M = \{1;5;9;13,...\}$

c) $5k+4 \Rightarrow M = \{4;9;14;19,...\}$

Př. 8: Číslo n jsme si vyjádřili pomocí přirozeného čísla k takto: $n = 3k+1$. Vyjádři pomocí k čísla: a) $n+1$, b) $n-2$, c) $n+3$, d) $2n$.

a) $n+1 = 3k+1+1 = 3k+2$
b) $n-2 = 3k+1-2 = 3k-1$
c) $n+3 = 3k+1+3 = 3k+4$
d) $2n = 2(3k+1) = 6k+2$

Shrnutí: Všechna přirozená čísla můžeme rozdělit podle zbytků po dělení číslem k do k skupin.