

1.5.4 Důkazy dělitelnosti I

Předpoklady: 010503

Pedagogická poznámka: V následujících příkladech se často pracuje s neznámými, což je pro žáky velký nezvyk. Je proto třeba být připraven, brzo postrkávat u tabule.

Př. 1: Je dán součin dvou po sobě jdoucích přirozených čísel $n(n+1)$. Rozhodni, zda je nebo není dělitelný 2.

Součin je určitě dělitelný 2, alespoň jedno z čísel v součinu je sudé a pak je určitě sudý celý součin.

Příklad můžeme řešit i podrobněji.

Číslo je možné pomocí dvojky zapsat dvěma způsoby $n = 2k$ nebo $n = 2k + 1$.

- $n = 2k$, $n + 1 = 2k + 1$ (první je sudé, druhé liché)
potom $n(n+1) = 2k(2k+1) = 2 \cdot k(2k+1)$ - dělitelné dvěma
- $n = 2k + 1$, $n + 1 = 2k + 2$ (první je liché, druhé sudé)
potom $n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 2 \cdot (2k+1)(k+1)$ - dělitelné dvěma

Pedagogická poznámka: Žáci už sice za sebou mají hodinu dosazování do vzorce, ale nejsou v tom příliš obratní, proto následující příklady.

Př. 2: Rozhodni, zda je součin tří po sobě jdoucích přirozených čísel určitě dělitelný čísly 2, 3 a 4.

Stejná úvaha jako v předchozím případě.

Tři po sobě jdoucí čísla \Rightarrow

- minimálně jedno je dělitelné dvěma \Rightarrow součin je dělitelný dvěma,
- minimálně jedno je dělitelné třemi \Rightarrow součin je dělitelný třemi,
- ani jedno nemusí být dělitelné čtyřmi a nemusí být dvě z nich dělitelné dvěma \Rightarrow součin nemusí být dělitelný čtyřmi.

Př. 3: Zobecní výsledky dvou předchozích příkladů.

Hledáme zobecnění = hledáme větu, která bude v sobě obsahovat oba předchozí výroky.

Zobecnění: Součin n po sobě jdoucích přirozených čísel je určitě dělitelný číslem n (a všemi přirozenými čísly menšími než n).

Př. 4: Dokaž podrobněji, že součin tří po sobě jdoucích čísel je dělitelný třemi.

Součin tří po sobě jdoucích čísel: $n(n+1)(n+2)$.

Tři možnosti:

- $n = 3k$: $n + 1 = 3k + 1$, $n + 2 = 3k + 2$
 $n(n+1)(n+2) = 3 \cdot k(3k+1)(3k+2)$

- $n = 3k + 1$: $n + 1 = 3k + 1 + 1 = 3k + 2$, $n + 2 = 3k + 1 + 2 = 3k + 3$
 $n(n+1)(n+2) = (3k+1)(3k+2)(3k+3) = (3k+1)(3k+2)(k+1) \cdot 3$
- $n = 3k + 2$: $n + 1 = 3k + 2 + 1 = 3k + 3$, $n + 2 = 3k + 2 + 2 = 3k + 4$
 $n(n+1)(n+2) = (3k+2)(3k+3)(3k+4) = (3k+2) \cdot 3(k+1)(3k+4)$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad nemusí dokončit během hodiny všichni, ale všichni by se měli dostat minimálně do první třetiny, aby za případné asistence provedli dosazení.

Př. 5: Zjisti, jakým největším přirozeným číslem je určité dělitelný součin čtyř po sobě jdoucích přirozených čísel.

Máme součin $n(n+1)(n+2)(n+3)$.

Minimálně jedno z čísel je dělitelné 4, minimálně jedno je dělitelné 3, a minimálně jedno je dělitelné 2 a není dělitelné 4 (dělitelné dvěma jsou dvě z čísel, jedno pouze dvěma druhé i čtyřmi).

Součin je najednou dělitelný čísly 2, 3 a 4 \Rightarrow největší dělitel je číslo $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Př. 6: Zjisti, zda platí, že součet tří po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný třemi.

Zkusíme: $1 + 2 + 3 = 6$ - dělitelné třemi, ale není to důkaz.

Označíme čísla $\Rightarrow n, n+1, n+2$.

$n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1) \Rightarrow$ číslo je dělitelné třemi.

Př. 7: Zjisti, zda součet čtyř po sobě jdoucích čísel je dělitelný čtyřmi.

Zkusíme: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ - není to dělitelné čtyřmi \Rightarrow nemá cenu nic dokazovat, jasně to naplatí.

Přesto to zkusíme, abychom viděli, jak to je.

$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) = 4n + 6 = 4n + 4 + 2 = 4(n+1) + 2 \Rightarrow$ součet nebude nikdy dělitelný čtyřmi.

Př. 8: Rozhodni, zda je pravdivý následující výrok: „Součet n po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný číslem n “.

Výrok je nepravdivý, protože neplatí pro $n = 4$.

Př. 9: (Příhoda Doc. Caldy) V původních vozech pražského metra byly čtyři kratší a šest delších lavic na sezení. Na jedné z kratších lavic seděl doc. Calda s neznámým cizím pánem. Na jedné ze stran přistoupila korpulentní paní a se slovy „Tohle je pro tři“ rozhrnula oba pány na stranu a sedla si mezi ně. Po chvíli si doc. Calda na popisce všimnul, že vagón má 44 míst k sezení, a ihned ho napadlo, jak paní dokázat, že kratší lavice je ve skutečnosti pouze pro dva cestující. Proveď jeho důkaz.

Předpokládejme, že kratší lavice je pro tři cestující \Rightarrow počet cestujících ve vagónu:

- na kratších lavicích: $4 \cdot 3 = 12$,
- na delších lavicích: $6 \cdot k$ (k je počet cestujících, pro který je určena delší lavice).

Celkový počet cestujících ve vagónu: $44 = 12 + 6k \Rightarrow 32 = 6k$ - tato podmínka nemůže být nikdy splněna, protože nelze nalézt celé číslo k , pro které by platilo $32 = 6k$.
Pokud je kratší lavice pro dva cestující, platí: $44 = 4 \cdot 2 + 6k \Rightarrow 36 = 6k \Rightarrow k = 6 \Rightarrow$ delší lavice je určena pro šest cestujících.

Pedagogická poznámka: Dá se očekávat spíše konkrétní řešení než obecný přístup pomocí k .

Shrnutí: Součin n po sobě jdoucích čísel je určitě dělitelná číslem n (pro součet to neplatí).