1.5.7 Znaky dělitelnosti

Předpoklady: 010506

Pedagogická poznámka: Příklad 1 je dořešení zadání z minulé hodiny. Je třeba se u něj nezdržovat.

Př. 1: Na základní škole ses učil pravidla, podle kterých je možné ze zápisu čísla poznat, zda je dělitelné určitým číslem (znaky dělitelnosti). Zopakuj si pravidla dělitelnosti pro čísla 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10 a rozděl je do čtyř skupin (v každé skupině budou pravidla, která k sobě logicky patří).

Znaky dělitelnosti můžeme rozdělit do čtyř skupin:

- dělitelnost podle poslední cifry (čísla 2, 5, 10),
- dělitelnost podle posledního dvojčíslí (číslo 4),
- dělitelnosti podle ciferného součtu (čísla 3, 9),
- dělitelnost podle dělitelnosti jinými čísly (číslo 6).

Dělitelnost 12, 15, 18

Př. 2: Zdůvodni, proč neplatí pravidlo: Přirozené číslo je dělitelné 8, právě když je dělitelné 4 a 2.

$6 = 2 \cdot 3$, 2 a 3 jsou nesoudělná čísla, dělitelnost jedním neznamená dělitelnost druhým $\Rightarrow$ pokud k podmínce, že číslo je dělitelné dvěma přidáme podmínku, že musí být dělitelné třemi, část čísel, která vyhovují první podmínce (čísla $2;4;6;8;10;12;14,...$) vyřadíme dvě čísla ze tří a zbudou mám pouze čísla dělitelná šesti ($2;4;6;8;10;12;14,...$).

$8 = 4 \cdot 2$: čísla 4 a 2 jsou soudělná $\Rightarrow$ když je číslo dělitelné 4, tak víme, že je dělitelné 2, poznatek o dělitelnosti dvojkou nepřináší nic nového ani žádné omezení (pokud si vybereme čísla dělitelná čtyřmi ($4,8,12,16,20,24,...$), budou dělitelná i dvěma a žádné z nich nevyřadíme ($4,8,12,16,20,24,...$), i když je jasné, že pouze každé druhé číslo dělitelné čtyřmi je dělitelné i osmi.

Dělitelnost složených čísel musíme vyjadřovat pomocí dělitelnosti čísly, které nemají společného dělitele (nesoudělnými čísly).

Př. 3: Vyslov pravidla při dělitelnost přirozených čísel 12, 15 a 18.

Přirozené číslo je dělitelné 12, právě když je dělitelné 3 a 4. (nemůžeme používat 6 a 2, protože jsou to soudělná čísla).
Přirozené číslo je dělitelné 15, právě když je dělitelné 3 a 5.
Přirozené číslo je dělitelné 18, právě když je dělitelné 2 a 9. (nemůžeme používat 6 a 3, protože jsou to soudělná čísla).

Dělitelnost 2, 5, 10

Pravidla při dělitelnost přirozených čísel 2, 5 a 10 můžeme vyslovit tak, aby se lišila pouze uváděnými čísly.
Přirozené číslo je dělitelné:

* 10, právě když jeho zápis končí 0,
* 5, právě když jeho zápis končí 0nebo 5,
* 2, právě když jeho zápis končí na číslici, která je dělitelná dvojkou.

Nástin důkazu:
Všechny předchozí pravidla, závisí pouze na poslední číslici.
Libovolné trojmístné číslo *abc* $\Rightarrow$ $abc = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = 10(a \cdot 10 + b) + c$.
První část je dělitelná 10,5,2 $\Rightarrow$ záleží na *c*:

* $c = 0$ $\Rightarrow$ číslo *abc* je dělitelné 10.
* $c = 0,5$ $\Rightarrow$ číslo *abc* je dělitelné 5.
* $c = 0,2,4,6,8$ $\Rightarrow$ číslo *abc* je dělitelné 2.

Př. 4: Co má pravidlo pro dělitelnosti 4 společného s pravidlem pro dělitelnost 2? Čím se pravidla liší? Navrhni nástin důkazu pravidla pro dělitelnosti 4. Jaká další čísla budou mít podobné pravidlo? Sepiš tato pravidla.

* Společný rys pravidel pro 4 a 2: Dělitelnost závisí pouze na konci čísla (poslední číslo nebo poslední dvojčíslí).
* Rozdílný rys pravidel pro 4 a 2: Dělitelnost 2 rozhoduje jen poslední číslo, dělitelnost 4 rozhodují dvě poslední čísla.

Důkaz: Postupujeme stejně jako u předchozích pravidel a vytkneme ze všech členů, které nepatří do posledního dvojčíslí.
Libovolné čtyřmístné číslo *abcd* $\Rightarrow$
$abcd = a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d = 100(a \cdot 10 + b) + c \cdot 10 + d$.
První část je dělitelná 4 $\Rightarrow$ dělitelnost celého čísla záleží pouze na posledním dvojčíslí *cd*.

Stejné pravidlo jako číslo 4 budou mít další čísla, která jsou děliteli čísla 100 a nedělí číslo 10 $\Rightarrow$ 4, 20, 25, 50, 100.
Přirozené číslo je dělitelné:

* 4, právě když jeho poslední dvojčíslí je dělitelné 4,
* 20, právě když jeho poslední dvojčíslí je dělitelné 20,
* 25, právě když jeho poslední dvojčíslí je dělitelné 25,
* 50, právě když jeho poslední dvojčíslí je dělitelné 50,
* 100, právě když jeho poslední dvojčíslí je dělitelné 100 (končí na dvě nuly).

Pedagogická poznámka: Úspěch předchozího příkladu závisí na tom, jak dobře se podaří najít společné rozdílné rysy dělitelnosti 2 a 4.

Dělitelnost 8

Př. 5: Navrhni pravidlo pro dělitelnost 8. Která čísla budou mít podobná pravidla?

Postupujeme podobně jako u 4, jenom vytýkáme 1000, který je dělitelný 8.
$abcde = a \cdot 10000 + b \cdot 1000 + c \cdot 100 + d \cdot 10 + e = 1000(a \cdot 10 + b) + cde$
První část dělitelná 8 $\Rightarrow$ záleží na *cde* (poslední trojčísli).
Přirozené číslo je dělitelné 8, právě když jeho poslední trojčíslí je dělitelné 8.

Která čísla mají podobné pravidlo?
Pravidlo pro 4, 20, 25, 50 a 100: vytýkali jsme stovku (platí $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$) $\Rightarrow$ na posledním dvojčíslí záleželo u čísel, která se dají sestavit ze stejných čísel jako stovka (pak bude stovka jimi dělitelná).
$\Rightarrow$ Pravidlo pro dělitelnost pomocí posledního trojčíslí platí u čísel, která je možné sestavit ze součinů z čísel $1000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$, tedy čísla 40, 200, 125, 250, 500.

Pravidlo pro dělitelnost 8 je v praxi většinou k ničemu, málokdy počítáme s čísly většími než 1000 bez kalkulačky.

Dělitelnost 3a 9
Pravidla při dělitelnost přirozených čísel 3 a 9.

- Přirozené číslo je dělitelné 3, právě když je jeho ciferný součet dělitelný 3.
- Přirozené číslo je dělitelné 9, právě když je jeho ciferný součet dělitelný 9.

Proč se tato pravidla tak výrazně liší od ostatních pravidel?
Zkusíme například 7842: ciferný součet $7+8+4+2=21$ $\Rightarrow$ dělitelné třemi, není dělitelné 9.
Rozvinutý zápis čísla (jako u ostatních důkazů): $7842 = 7 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 2$.
U předchozích důkazů jsme hledali čísla dělitelná číslem, jehož dělitelnost jsme dokazovali $\Rightarrow$ hledáme čísla dělitelná 3 a 9 $\Rightarrow$ nic nenacházíme.
Nápad: Číslo dělitelné 3 a 9 si vyrobíme: $10 = 9 + 1$ (podobně i u ostatních mocnin 10).
$$7842 = 7 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 2 = 7 \cdot (999+1) + 8 \cdot (99+1) + 4 \cdot (9+1) + 2$$
Roznásobíme závorky:
$$7842 = \underbrace{7 \cdot 999 + 8 \cdot 99 + 4 \cdot 9}_{\text{dělitelné 3 a 9}} + \underbrace{7+8+4+2}_{\text{ciferný součet}}$$
Obecně pro čtyřmístná čísla:
$$abcd = a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d = a \cdot (999+1) + b \cdot (99+1) + c \cdot (9+1) + d =$$
$$a \cdot 999 + a + b \cdot 99 + b + c \cdot 9 + c + d = 9(a \cdot 111 + b \cdot 11 + c) + a + b + c + d$$
první část dělitelná 3 i 9 $\Rightarrow$ záleží na druhé (ciferný součet).

Pedagogická poznámka: Následující část je třeba zorganizovat tak, aby na poslední příklad. zbylo minimálně 7 minut.

Př. 6: Najdi pravidlo určující dělitelnost trojmístných čísel sedmi (inspiruj se nástinem důkazu pravidlo pro dělitelnost třemi a devíti).

Základem pravidla pro dělitelnost 3 a 9 je rozdělení mocnin deseti z rozvinutého zápisu čísla na násobky devíti (co největší) a zbytek (co nejmenší).
$$abc = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = a(98+2) + b(7+3) + c$$
100 a 10 rozdělíme na největší násobek sedmi a zbytek, závorky roznásobíme:
$$abc = \underbrace{98 \cdot a + 7 \cdot b}_{\text{dělitelné sedmi}} + \underbrace{2 \cdot a + 3 \cdot b + c}_{\text{pravidlo}}$$
$\Rightarrow$ **Trojciferné číslo je dělitelné 7, právě když součet dvojnásobku počtu stovek, trojnásobku počtu desítek a počtu jednotek je dělitelný 7.**

Pravidlo pro dělení sedmi pouze pro trojciferná čísla je dlouhé a složité. Čím více cifer, tím delší pravidlo $\Rightarrow$ proto se pravidlo pro dělitelnost 7 v učebnicích neuvádí.

Př. 7: Rozhodni, podle právě odvozeného pravidla, zda jsou sedmi dělitelná následující čísla: a) 158 b) 336 c) 981

a) 158
$2\cdot 1+3\cdot 5+8=25 \Rightarrow$ číslo 158 není dělitelné sedmi.

b) 336
$2\cdot 3+3\cdot 3+6=21 \Rightarrow$ číslo 336 je dělitelné sedmi ($336:7=48$).

c) 981
$2\cdot 9+3\cdot 8+1=43 \Rightarrow$ číslo 981 není dělitelné sedmi.

Př. 8: Jaké číslice můžeme doplnit na prázdné místo, abychom získali trojmístné číslo dělitelné 7? a) $23\square$ b) $3\square 1$

a) $23\square$
Pravidlo: $2\cdot 2+3\cdot 3=13$. Číslice na místě jedniček se započítává jednou $\Rightarrow$ můžeme dopsat číslice:

- $1 \Rightarrow 2\cdot 2+3\cdot 3+1=13+1=14 \Rightarrow 231:7=33$,
- $8 \Rightarrow 2\cdot 2+3\cdot 3+8=13+8=21 \Rightarrow 238:7=34$.

b) $3\square 1$
Pravidlo: $2\cdot 3+1\cdot 1=7$. Číslice na místě desítek se započítává třikrát $\Rightarrow$ můžeme dopsat číslice dělitelné sedmi (zbytek součtu je dělitelný sedmi):

- $0 \Rightarrow 2\cdot 3+3\cdot 0+1\cdot 1=7 \Rightarrow 301:7=43$,
- $7 \Rightarrow 2\cdot 3+3\cdot 7+1\cdot 1=28 \Rightarrow 371:7=53$.

Pedagogická poznámka: Pokud máme v hodině jen trochu času nechám u předchozího příkladu žáky na kalkulačkách vyzkoušet, že doplněním jakékoliv jiné číslice, získáme číslo, které sedmi dělitelné není.

Př. 9: U následujících čísel urči zda jsou dělitelné některým z čísel: 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12 a 15. a) 297, b) 3460, c) 3162, d) 70010, e) 7555, f) 505984.

a) 297
Poslední cifra 7 $\Rightarrow$ není dělitelné 2, 4, 5, 6, 10, 12 a 15.
Ciferný součet 18 $\Rightarrow$ je dělitelné 3 a 9.

b) 3460
Poslední cifra 0 $\Rightarrow$ dělitelné 2, 5, 10.
Poslední dvojčíslí 60 $\Rightarrow$ dělitelné 4.
Ciferný součet 13 $\Rightarrow$ není dělitelné 3 a 9 $\Rightarrow$ není dělitelné 12 a 15.

c) 3162
Poslední cifra 2 $\Rightarrow$ dělitelné 2,
$\Rightarrow$ není dělitelné 5, 10, 15.
Poslední dvojčíslí 62 $\Rightarrow$ není dělitelné 4, 12.
Ciferný součet 12 $\Rightarrow$ je dělitelné 3, není dělitelné 9.

d) 70010
Poslední cifra 0 $\Rightarrow$ dělitelné 2, 5, 10.
Poslední dvojčíslí 10 $\Rightarrow$ není dělitelné 4, 12 .
Ciferný součet 8 $\Rightarrow$ není dělitelné 3 a 9 $\Rightarrow$ není dělitelné 12 a 15.

e) 7555
Poslední cifra 5 $\Rightarrow$ dělitelné 5,
$\Rightarrow$ není dělitelné 2, 10, 4, 12.
Ciferný součet 22 $\Rightarrow$ není dělitelné 3 a 9 $\Rightarrow$ není dělitelné 15.

f) 505984
Poslední cifra 4 $\Rightarrow$ dělitelné 2,
$\Rightarrow$ není dělitelné 5, 10, 15.
Poslední dvojčíslí 84 $\Rightarrow$ dělitelné 4.
Ciferný součet 31 $\Rightarrow$ není dělitelné 3 a 9 $\Rightarrow$ není dělitelné 12.

Pedagogická poznámka: Už před začátkem příkladu upozorňuji, že důležitá je i strategie postupu, která může ušetřit spoustu práce. Po prvních dvou bodech si právě o ní povídáme.

Shrnutí: Znaky dělitelnost čísel úzce souvisí s rozvinutým zápisem čísla v desítkové soustavě.