1.5.8 Největší společný dělitel, nejmenší společný násobek

Předpoklady: 1507

Př. 1: Rozhodni s pomocí kalkulačky, zda je číslo 9945656597 prvočíslo.

Číslo 9945656597 je také prvočíslo. Můžeme si to ověřit například dotazem "isprime 9945656597" na Wolfram Alpha.
Dělení všemi prvočísly menšími než 99 727 je i na kalkulačce poměrně zdlouhavé.

Pedagogická poznámka: Že číslo 9945656597 je prvočíslem není na většině běžných kalkulaček možné ověřit pouhým dělením, protože výsledek po dělení třemi přesahuje počet míst na displeji a tváří se jako celý. U prvočísel menších než deset je tedy nutné dělitelnost ověřovat pomocí zpětného násobení nebo pomocí znaků dělitelnosti (ciferný součet $9+9+4+5+6+5+6+5+9+7=65$). Každopádně diskuse se vyhýbám diskusi a jdu dále.

Pedagogická poznámka: Pokud chcete nechat žáky, aby se pokusili samostatně sestavit pravidla (příklady 5 a 10) je nutné psát prvočíselné rozklady s mocninami.

Př. 2: Při satelitním snímkování je potřeba zachytit obdélníkové území o stranách 18 km a 24 km. Satelit snímá povrch Země ve formě čtvercových fotografií o libovolné velikosti strany. Urči, jak pokrýt zmiňované území, co nejmenším počtem co největších čtverců.

Hledáme co největší číslo, které dělí 18 i 24.
$D(18)=\{1,2,3,6,9,18\}$
$D(24)=\{1,2,3,4,6,8,24\}$
Největší společný dělitel je 6 $\Rightarrow$ území rozdělíme na 12 čtverců 6 km x 6 km.

Píšeme: $D(18,24)=6$, čteme **největší společný dělitel** 18 a 24 je 6.

Jak hledat rychleji než ze všech dělitelů (u některých čísel jich je hodně)?
Přes prvočíselný rozklad:

- $18=2\cdot 3^2=2\cdot 3\cdot 3$
- $24=2^3\cdot 3=2^2\cdot 2\cdot 3$

Společné je $2\cdot 3=6$

Největšího společného dělitele je možné hledat i pro více čísel najednou.

Př. 3: Najdi $D(36,48,60)$.

- $36=2^2\cdot 3^2=2^2\cdot 3\cdot 3$
- $48=2^4\cdot 3=2^2\cdot 2^2\cdot 3$
- $60=2^2\cdot 3\cdot 5$

$D(36, 48, 60) = 2^2 \cdot 3 = 12$

Př. 4: Najdi $D(140,168,210)$.

- $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$
- $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 7$
- $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

$D(140,168,210) = 2 \cdot 7 = 14$

Př. 5: Zformuluj větu, která definuje postup nalezení největšího společného dělitele čísel *a*, *b*, *c*. Postup musí vycházet z prvočíselného rozkladu čísel.

Největším společným dělitelem čísel *a*, *b*, *c* je součin těch prvočísel, které se vyskytují v prvočíselných rozkladech všech tří čísel. U každého prvočísla použijeme nejvyšší mocninu, která se vyskytuje ve všech prvočíselných rozkladech.

Pedagogická poznámka: Řešení studentů se budou lišit, je třeba společně rozebrat, co je ještě dobře a co není (na to stačí předvádět hloupého robota, který rozumí jen základním operacím). Chyby si mohou nejdříve hledat navzájem a publikovat až společnou práci. Je možné spojovat vícekrát (nejdříve dvojice dohromady, pak čtveřice, …) podle času. Nedoporučuji říkat dopředu, že budou pravidlo publikovat společně (sousedé lepších žáků to ihned vzdávají).

Kdy se hodí hledání největšího společného dělitele?
Při krácení zlomků hledáme největšího společného dělitele čitatele a jmenovatele, abychom ho pak mohli vykrátit.

Př. 6: Jednou z částí slavnostního zahájení olympijských her je společná skladba na hudbu. V průběhu skladby cvičenci vystupují ve skupinách po 18 a 24. Urči nejmenší možný počet cvičenců, který může skladbu nacvičovat.

Cvičenců musí být tolik, aby mohli utvořit skupiny po 18 i 24 $\Rightarrow$ hledáme nejmenší násobek společný oběma číslům.
Píšeme násobky pro obě čísla:

- 18, 36, 54, 72, 90, 108, …
- 24, 48, 72, 96, …

Skladbu musí nacvičovat alespoň 72 cvičenců.

V předchozím příkladě jsme hledali **nejmenší společný násobek** čísel 18 a 24. Píšeme $n(18,24) = 72$.

Př. 7: Navrhni význam zápisu $N(12)$.

Jde o množinu všech násobků. Platí tedy: $N(12) = \{12, 24, 36, 48, 60....\}$

Pedagogická poznámka: První návrh většinou zní „největší společný násobek“. Právě diskuse o nesmyslnosti tohoto nápadu (chybí více čísel, největší společný násobek nemůže existovat“…) je hlavním záměrem příkladu.

Hledání nejmenšího společného násobku pomocí množin násobků je pomalé.

Př. 8: Navrhni metodu hledání nejmenšího společného násobku pomocí prvočíselného rozkladu na příkladu hledání $n(18, 24)$.

- $18 = 2 \cdot 3^2$
- $24 = 2^3 \cdot 3$

Vybereme vždy největší mocninu u každého prvočísla, které se objeví (násobek pak bude dělitelný oběma čísly).

$n(18,\ 24) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$

Jde použít i na více čísel.

Př. 9: Urči $n(14,35,20)$.

- $14 = 2 \cdot 7$
- $35 = 5 \cdot 7$
- $20 = 2^2 \cdot 5$

$n(14,35,20) = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 = 140$

Př. 10: Zformuluj větu, která by definuje postup nalezení nejmenšího společného násobku čísel *a*, *b*, *c*. Postup musí vycházet z prvočíselného rozkladu čísel.

Nejmenším společným násobkem čísel *a*, *b*, *c* je součin těch prvočísel, které se vyskytují v prvočíselných rozkladech alespoň jednoho z těchto tří čísel. U každého prvočísla použijeme nejvyšší mocninu, která se vyskytuje v libovolném prvočíselném rozkladu.

Největší společný dělitel jsme hledali kvůli krácení zlomků, nejmenší společný násobek potřebujeme, když zlomky převádíme na společného jmenovatele.

Př. 11: Najdi společného jmenovatele zlomků $\frac{3}{42}, \frac{6}{28}, \frac{5}{12}$.

Společným jmenovatelem je číslo, které je dělitelné všemi jmenovateli, tedy společný násobek. Nejvýhodnější je použít ten nejmenší.

- $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$
- $28 = 2^2 \cdot 7$
- $12 = 2^2 \cdot 3$

$n(42,28,12) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$

Společným jmenovatelem zadaných zlomků je číslo 84.

Př. 12: Urči $D(756,1680)$ a $n(756,1680)$.

$756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$

$1680 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
$D(756,1680) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$ - společné mocniny
$n(756,1680) = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 15120$ - největší mocniny

Př. 13: Spočítej součiny $756 \cdot 1680$ a $D(756,1680) \cdot n(756,1680)$. Porovnej výsledky a vysvětli.

$756 \cdot 1680 = 1\ 270\ 080$
$84 \cdot 15120 = 1\ 270\ 080$
Nejde o náhodu!
Vyznačíme si v prvočíselných rozkladech červeně členy do největšího dělitele a modře členy pro nejmenší násobek.
$756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$
$1680 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
Nic nezbylo, u dvou čísel je to tak vždy.
Pro více než dvě čísla to neplatí.

Shrnutí: Při krácení zlomků potřebujeme $D(a,b)$ (společné prvočinitele), při hledání společného jmenovatele potřebujeme $n(a,b)$ (největší vyskytující se prvočinitele).