1.5.10 Nejmenší společný násobek

Předpoklady: 010509

Př. 1: Jednou z částí slavnostního zahájení olympijských her je společná skladba na hudbu. V průběhu skladby cvičenci vystupují ve skupinách po 18 a 24. Urči nejmenší možný počet cvičenců, který může skladbu nacvičovat.

Cvičenců musí být tolik, aby mohli utvořit skupiny po 18 i 24 $\Rightarrow$ hledáme nejmenší násobek společný oběma číslům.
Píšeme násobky pro obě čísla:

- 18, 36, 54, 72, 90, 108, …
- 24, 48, 72, 96, …

Skladbu musí nacvičovat alespoň 72 cvičenců.

V předchozím příkladě jsme hledali **nejmenší společný násobek** čísel 18 a 24. Píšeme $n(18,24)=72$.

Př. 2: Navrhni význam zápisu $N(12)$.

Jde o množinu všech násobků. Platí tedy: $N(12)=\{12,24,36,48,60....\}$

Pedagogická poznámka: První návrh většinou zní „největší společný násobek“. Právě diskuse o nesmyslnosti tohoto nápadu (chybí více čísel, největší společný násobek nemůže existovat“…) je hlavním záměrem příkladu.

Hledání nejmenšího společného násobku pomocí množin násobků je pomalé.

Př. 3: Navrhni metodu hledání nejmenšího společného násobku pomocí prvočíselného rozkladu na příkladu hledání $n(18, 24)$.

- $18=2\cdot 3^2$
- $24=2^3\cdot 3$

Vybereme vždy největší mocninu u každého prvočísla, které se objeví (násobek pak bude dělitelný oběma čísly).
$n(18,\ 24)=2^3\cdot 3^2=72$

Jde použít i na více čísel.

Př. 4: Urči $n(14,35,20)$.

- $14=2\cdot 7$
- $35=5\cdot 7$
- $20=2^2\cdot 5$

$n(14,35,20)=2^2\cdot 5\cdot 7=140$

Př. 5: Zformuluj větu, která by definuje postup nalezení nejmenšího společného násobku čísel *a*, *b*, *c*. Postup musí vycházet z prvočíselného rozkladu čísel.

Nejmenším společným násobkem čísel *a*, *b*, *c* je součin těch prvočísel, které se vyskytují v prvočíselných rozkladech alespoň jednoho z těchto tří čísel. U každého prvočísla použijeme nejvyšší mocninu, která se vyskytuje v libovolném prvočíselném rozkladu.

Největší společný dělitel jsme hledali kvůli krácení zlomků, nejmenší společný násobek potřebujeme, když zlomky převádíme na společného jmenovatele.

Př. 6: Najdi společného jmenovatele zlomků $\frac{3}{42}, \frac{6}{28}, \frac{5}{12}$.

Společným jmenovatelem je číslo, které je dělitelné všemi jmenovateli, tedy společný násobek. Nejvýhodnější je použít ten nejmenší.

- $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$
- $28 = 2^2 \cdot 7$
- $12 = 2^2 \cdot 3$

$n(42, 28, 12) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$

Společným jmenovatelem zadaných zlomků je číslo 84.

Př. 7: Urči $D(756, 1680)$ a $n(756, 1680)$.

$756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$

$1680 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

$D(756, 1680) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$ - společné mocniny

$n(756, 1680) = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 15120$ - největší mocniny

Př. 8: Spočítej součiny $756 \cdot 1680$ a $D(756, 1680) \cdot n(756, 1680)$. Porovnej výsledky a vysvětli.

$756 \cdot 1680 = 1\ 270\ 080$

$84 \cdot 15120 = 1\ 270\ 080$

Nejde o náhodu!

Vyznačíme si v prvočíselných rozkladech červeně členy do největšího dělitele a modře členy pro nejmenší násobek.

$756 = \color{red}{2^2} \cdot \color{blue}{3^3} \cdot \color{red}{7}$

$1680 = \color{blue}{2^4} \cdot \color{red}{3} \cdot \color{blue}{5} \cdot \color{blue}{7}$

Nic nezbylo, u dvou čísel je to tak vždy.

Pro více než dvě čísla to neplatí.

Shrnutí: Při hledání společného jmenovatele potřebujeme $n(a, b)$ (největší vyskytující se prvočinitele).