

1.5.10 Nejmenší společný násobek

Předpoklady: 010509

Př. 1: Jednou z částí slavnostního zahájení olympijských her je společná skladba na hudbu. V průběhu skladby cvičenci vystupují ve skupinách po 18 a 24. Urči nejmenší možný počet cvičenců, který může skladbu nacvičovat.

Cvičenců musí být tolik, aby mohli utvořit skupiny po 18 i 24 \Rightarrow hledáme nejmenší násobek společný oběma číslům.

Píšeme násobky pro obě čísla:

- 18, 36, 54, 72, 90, 108, ...
- 24, 48, 72, 96, ...

Skladbu musí nacvičovat alespoň 72 cvičenců.

V předchozím příkladě jsme hledali **nejmenší společný násobek** čísel 18 a 24. Píšeme $n(18, 24) = 72$.

Př. 2: Navrhni význam zápisu $N(12)$.

Jde o množinu všech násobků. Platí tedy: $N(12) = \{12, 24, 36, 48, 60, \dots\}$

Pedagogická poznámka: První návrh většinou zní „největší společný násobek“. Právě diskuse o nesmyslnosti tohoto nápadu (chybí více čísel, největší společný násobek nemůže existovat...) je hlavním záměrem příkladu.

Hledání nejmenšího společného násobku pomocí množin násobků je pomalé.

Př. 3: Navrhni metodu hledání nejmenšího společného násobku pomocí prvočíselného rozkladu na příkladu hledání $n(18, 24)$.

- $18 = 2 \cdot 3^2$
- $24 = 2^3 \cdot 3$

Vybereme vždy největší mocninu u každého prvočísla, které se objeví (násobek pak bude dělitelný oběma čísly).

$$n(18, 24) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$$

Jde použít i na více čísel.

Př. 4: Urči $n(14, 35, 20)$.

- $14 = 2 \cdot 7$
- $35 = 5 \cdot 7$
- $20 = 2^2 \cdot 5$

$$n(14, 35, 20) = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 = 140$$

Př. 5: Zformuluj větu, která definuje postup nalezení nejmenšího společného násobku čísel a, b, c . Postup musí vycházet z prvočíselného rozkladu čísel.

Nejmenším společným násobkem čísel a, b, c je součin těch prvočísel, která se vyskytují v prvočíselných rozkladech alespoň jednoho z těchto tří čísel. U každého prvočísla použijeme nejvyšší mocninu, která se vyskytuje v libovolném prvočíselném rozkladu.

Největší společný dělitel jsme hledali kvůli krácení zlomků, nejmenší společný násobek potřebujeme, když zlomky převádíme na společného jmenovatele.

Př. 6: Najdi společného jmenovatele zlomků $\frac{3}{42}, \frac{6}{28}, \frac{5}{12}$.

Společným jmenovatelem je číslo, které je dělitelné všemi jmenovateli, tedy společný násobek. Nejvýhodnější je použít ten nejmenší.

- $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$
- $28 = 2^2 \cdot 7$
- $12 = 2^2 \cdot 3$

$$n(42, 28, 12) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$$

Společným jmenovatelem zadaných zlomků je číslo 84.

Př. 7: Urči $D(756, 1680)$ a $n(756, 1680)$.

$$756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$$

$$1680 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$D(756, 1680) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84 \text{ - společné mocniny}$$

$$n(756, 1680) = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 15120 \text{ - největší mocniny}$$

Př. 8: Spočítej součiny $756 \cdot 1680$ a $D(756, 1680) \cdot n(756, 1680)$. Porovnej výsledky a vysvětli.

$$756 \cdot 1680 = 1\,270\,080$$

$$84 \cdot 15120 = 1\,270\,080$$

Nejde o náhodu!

Vyznačíme si v prvočíselných rozkladech červeně členy do největšího dělitele a modře členy pro nejmenší násobek.

$$756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$$

$$1680 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Nic nezbylo, u dvou čísel je to tak vždy.

Pro více než dvě čísla to neplatí.

Shrnutí: Při hledání společného jmenovatele potřebujeme $n(a, b)$ (největší vyskytující se prvočinitele).