

1.5.11 Dělitelnost - shrnutí

Předpoklady: 010509

Shrnutí dělitelnosti

Důležité znalosti

- $403 = 4 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$, stejně i s jinými základy \Rightarrow
 - $(1011)_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$,
 - při převádění z desítkové soustavy hledáme skupiny od největší (například 2^4 , 2^3 , ..),
 - každá soustava potřebuje jen tolik číslic, jaký má základ,
 - šestnáctková soustava: $a = 10$, $b = 11$, ...,
- podle dělení rozdělujeme do zbytkových tříd ($3k + 1$ - při dělení třemi zbytek 1),
- součin n po sobě jdoucích čísel je dělitelný n (a všemi menšími přirozenými čísly),
- důkazy dělitelnosti: součiny po sobě jdoucích čísel (\Rightarrow rozkládání na součin) nebo dosazování zbytkových tříd,
- $abcd = a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d = 100(a \cdot 10 + b) + c \cdot 10 + d \Rightarrow$ znaky dělitelnosti čísel, která můžeme sestavit z 2 a 5,
 - 2, 5, 10 – dělitelnost poslední cifry,
 - 4, 25, 20, 50, 100 – dělitelnost posledního dvojčíslí,
 - 8, 125, ... - dělitelnost posledního trojčíslí,
- $abcd = a \cdot (999 + 1) + b \cdot (99 + 1) + c \cdot (9 + 1) + d = 9(a \cdot 111 + b \cdot 11 + c) + a + b + c + d \Rightarrow$ dělitelnost 3 a 9 podle ciferného součtu,
- $6 = 2 \cdot 3$ dělitelné šesti, když je dělitelné 2 a 3 (nefunguje pro soudělná čísla jako $8 = 4 \cdot 2$),
- prvočíselný rozklad je jednoznačný,
- $D(18, 24) = 6$ (společné v prvočíselných rozkladech),
- $n(18, 24) = 72$ (největší vyskytující se v prvočíselných rozkladech).

Zádrhele

- 1 není prvočíslo, 2 je prvočíslo,
- součet po sobě jdoucích čísel obecně nic neříká o dělitelnosti.

Dobré rady

- dokazování prvočíselnosti jen přes prvočísla menší než druhá odmocnina,
- při důkazech dělitelnosti se vyplatí vytvořit součin,
- při vytváření prvočíselných rozkladů je lepší dělit větším číslem ($60 = 6 \cdot 10 =$).

Př. 1: Převeď čísla do označené číselné soustavy.

a) $(10101)_2 = ()_{10}$

b) $(10101)_3 = ()_{10}$

c) $(A2)_{16} = ()_{10}$

d) $(29)_{10} = ()_2$

e) $(30)_{10} = ()_4$

f) $(42)_{10} = ()_{16}$

a) $(10101)_2 = ()_{10}$

$$(10101)_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 16 + 4 + 1 = 21$$

$$\text{b) } (10101)_3 = (\quad)_{10}$$

$$(10101)_3 = 1 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 81 + 9 + 1 = 91$$

$$\text{c) } (A2)_{16} = (\quad)_{10}$$

$$(A2)_{16} = 10 \cdot 16^1 + 2 \cdot 16^0 = 160 + 2 = 162$$

$$\text{d) } (29)_{10} = (\quad)_2$$

$$29 = 16 + 8 + 4 + 1 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (11101)_2$$

$$\text{e) } (30)_{10} = (\quad)_4$$

$$30 = 16 + 3 \cdot 4 + 2 = 1 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0 = (132)_4$$

$$\text{f) } (42)_{10} = (\quad)_{16}$$

$$42 = 2 \cdot 16 + 10 = 2 \cdot 16^1 + 10 \cdot 16^0 = (2A)_{16}$$

Pedagogická poznámka: Objevuje se značné množství studentů, kteří úspěšně vyřeší body a)

– c) a v bodě d) postupují takto: $(29)_{10} = 2 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 = (29)_2$. Jde o to, že si sice pamatují algoritmus převádění do desítkové soustavy, ale chybí jim obecná představa o tom, že u číselných soustav se řeší dva druhy příkladů: při převádění do desítkové soustavy se snažíme zjistit, kolik věcí (vyjádřením v desítkové soustavě) znamená nezvyklý zápis čísla, při převádění z desítkové soustavy naopak „zašifrováváme“ představitelné vyjádření čísla v desítkové soustavě pomocí mocnin jiného základu do nečitelné formy. Z toho je jasné, že nemůže používat pro oba problémy stejný postup.

Když tento problém řešíme, samozřejmě se bavíme o tom, jak je tento náhled důležitý.

Př. 2: Kolik po sobě jdoucích přirozených čísel musíme vynásobit, aby byl jejich součin určitě dělitelný osmi?

Platí: $8 = 4 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \Rightarrow$ součin musí obsahovat buď tři čísla dělitelná dvěma, nebo číslo dělitelné čtyřma a ještě další číslo dělitelné dvěma.

Součin čtyř po sobě jdoucích čísel:

- jedno číslo dělitelné čtyřmi,
- jedno další číslo dělitelné dvěma.

\Rightarrow Musíme vynásobit alespoň čtyři po sobě jdoucí čísla, aby byl jejich součin jistě dělitelný osmi.

Př. 3: Najdi $n(60, 72)$ a $D(60, 72)$.

$$60 = 6 \cdot 10 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$72 = 8 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$D(60, 72) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

$$n(60, 72) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 360$$

Př. 4: Dokaž, že pro každé přirozené číslo n platí: $2 \mid n^3 + n$.

Nejdříve upravíme výraz $n^3 + n = n(n^2 + 1) \Rightarrow$ nemůžeme číslo interpretovat jako součin po sobě jdoucích čísel \Rightarrow zkusíme dokazovat pomocí zbytkových tříd.

Všechna přirozená čísla můžeme rozdělit podle dělitelnosti dvěma do dvou množin $n = 2k$ a $n = 2k + 1$.

- pro $n = 2k$: $n^3 + n = n(n^2 + 1) = 2k \left[(2k)^2 + 1 \right] = 2 \cdot k \left[(2k)^2 + 1 \right] \Rightarrow$ je dělitelné dvěma.

- pro $n = 2k + 1$:
$$n^3 + n = n(n^2 + 1) = (2k + 1) \left[(2k + 1)^2 + 1 \right] = (2k + 1) \left[4k^2 + 4k + 1 + 1 \right] =$$
$$= (2k + 1) (4k^2 + 4k + 2) = (2k + 1) \cdot 2 \cdot (2k^2 + 2k + 1)$$
$$\Rightarrow$$
 je dělitelné dvěma.

Jiná možnost není \Rightarrow pro každé přirozené číslo n platí: $2 \mid n^3 + n$.

Př. 5: Jakým největším číslem je určitě dělitelný součin pěti po sobě jdoucích čísel?

Součin pěti po sobě jdoucích čísel: $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$:

- alespoň dvě čísla dělitelná dvěma, jedno z nich čtyřmi,
- alespoň jedno číslo dělitelné třemi,
- alespoň jedno číslo dělitelné pěti,

\Rightarrow součin je dělitelný $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 120$.

Př. 6: Dokaž, že pro každé přirozené číslo n platí: $3 \mid n^3 + 2n$.

Nejdříve upravíme výraz $n^3 + 2n = n(n^2 + 2) \Rightarrow$ nemůžeme číslo interpretovat jako součin po sobě jdoucích čísel \Rightarrow zkusíme dokazovat pomocí zbytkových tříd.

Všechna přirozená čísla můžeme rozdělit podle dělitelnosti třemi do tří množin $n = 3k$, $n = 3k + 1$ a $n = 3k + 2$.

- pro $n = 3k$: $n^3 + 2n = n(n^2 + 2) = 3k \left[(3k)^2 + 2 \right] = 3 \cdot k \left[(3k)^2 + 2 \right] \Rightarrow$ je dělitelné třemi.

- pro $n = 3k + 1$:
$$n^3 + 2n = n(n^2 + 2) = (3k + 1) \left[(3k + 1)^2 + 2 \right] = (3k + 1) \left[9k^2 + 6k + 1 + 2 \right] =$$
$$= (3k + 1) (9k^2 + 6k + 3) = (3k + 1) \cdot 3 \cdot (3k^2 + 2k + 1) \Rightarrow$$
 je dělitelné třemi,

- pro $n = 3k + 2$:
$$n^3 + 2n = n(n^2 + 2) = (3k + 2) \left[(3k + 2)^2 + 2 \right] = (3k + 2) \left[9k^2 + 12k + 4 + 2 \right] =$$
$$= (3k + 2) (9k^2 + 12k + 6) = (3k + 2) \cdot 3 \cdot (3k^2 + 4k + 2) \Rightarrow$$
 je dělitelné třemi.

Jiná možnost není \Rightarrow pro každé přirozené číslo n platí: $3 \mid n^3 + 2n$.

Př. 7: Jakým největším číslem je určitě dělitelný součet pěti po sobě jdoucích čísel?

Obecně neplatí pro součty po sobě jdoucích čísel pravidla podobná pravidlům pro součiny \Rightarrow zkusíme součet upravit.

$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) = 5n + 10 = 5(n+2) \Rightarrow$ součet pěti po sobě jdoucích čísel je určitě dělitelný pěti.

Dodatek: Součet k po sobě jdoucích čísel je dělitelný číslem k , pokud je k liché (důkaz v hodině 080204).

Př. 8: Vyslov pravidlo pro dělitelnosti přirozených čísel: a) 18 b) 36.

a) dělitelnost 18

$18 = 2 \cdot 9 \Rightarrow$ číslo je dělitelné 18, právě když je dělitelné 2 a 9 (rozklad $18 = 3 \cdot 6$ použít nemůžeme, protože 3 a 6 jsou čísla soudělná a dělitelnost jednoho souvisí s dělitelností druhého).

a) dělitelnost 36

$36 = 4 \cdot 9 \Rightarrow$ číslo je dělitelné 36, právě když je dělitelné 4 a 9 (rozklady $36 = 6 \cdot 6 = 12 \cdot 3$ použít nemůžeme, protože čísla v nich jsou soudělná a dělitelnost jednoho souvisí s dělitelností druhého).

Př. 9: Rozhodni, zda čísla 437 a 907 jsou prvočísla.

$\sqrt{437} < 23 \Rightarrow$ Nemá cenu zkoušet prvočísla větší než 19.

2,3,5,7,11,13,17 - nejde

$437 = 19 \cdot 23 \Rightarrow$ číslo 437 není prvočísl.

$\sqrt{907} < 31 \Rightarrow$ Poslední číslo, které vyzkoušíme, je 29.

2,3,5,7,11,13,17,19, 23, 29 - nejde

Číslo 907 je prvočísl.

Př. 10: Najdi $D(336, 588, 504)$.

$$336 = 3 \cdot 112 = 3 \cdot 4 \cdot 28 = 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 7 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7$$

$$588 = 4 \cdot 147 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 49 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2$$

$$504 = 4 \cdot 126 = 2 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 14 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$$

$$D(336, 588, 504) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$$

Př. 11: Najdi $n(120, 135, 112)$.

$$120 = 12 \cdot 10 = 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$135 = 5 \cdot 27 = 3^3 \cdot 5$$

$$112 = 4 \cdot 28 = 4 \cdot 4 \cdot 7 = 2^4 \cdot 7$$

$$n(120, 135, 112) = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 15120$$

Shrnutí:

