

Konec srandy!!!

1.6.1 Mocniny s přirozeným mocnitelem

Předpoklady: základní početní operace

Pedagogická poznámka: Zápis na začátku kapitoly je víc než jen sranda. Tato hodina je první v druhé části studia. Až dosud nehrálo zásadní roli, zda studenti chápou a pamatují si všechno, co jsme probírali. Od tohoto okamžiku se situace mění. Fakt, že studenti pochopí a budou si pamatovat všechny hlavní poznatky (červené rámečky), které budeme nyní probírat je z hlediska budoucího postupu v matematice zcela zásadní. Od tohoto okamžiku stavíme základy, na kterých bude stát celý zbytek matematického vzdělávání na gymnáziu. Zatímco dosud byla hlavním cílem práce o hodinách to, aby se studenti naučili pracovat a chápat probíranou látku, nyní je k tomu potřeba přidat ještě zapamatování si probírané látky a stavbu konzistentního systému. Dalším cílem výuky v tomto období je získání mechanických schopností při úpravě výrazů. Z tohoto důvodu v tomto období trvám na tom, aby studenti opravdu počítali všechny příklady ve sbírkách.

Pedagogická poznámka: Podle mě není možné probrat všechny vzorce pro mocniny s přirozeným mocnitelem v jediné hodině. Já jsem látku rozdělil do dvou hodin, navíc logicky k těmto dvěma hodinám patří i hodina *1603 KISS*, kde se studenty snažím naučit základní strategii postupného upravování bez zbytečného zesložitování příkladu. Je nutné, aby po každém vzorci i Ti nejpomalejší samostatně vyřešili alespoň několik prvních bodů z následujícího příkladu. Ti rychlejší stihnou příkladů samozřejmě víc, navíc se mohou zabavit počítáním sbírky.

Pedagogická poznámka: Zcela zásadní při řešení jakýchkoliv problémů je navést žáky k tomu, aby si uvědomili, že chyba nevyplynula z toho, že nepostřehli nějaké další pravidlo, ale z toho, že dostatečně důsledně neuplatnili pravidlo dávno probrané. Snažím se žáky vést k tomu, aby veškerá pravidla viděli jako důsledek definice mocniny.

Matematika se snaží o zestručnění a zpřehlednění zápisu \Rightarrow

- $5+5+5+5+5+5 = 6 \cdot 5$ (součet jsme napsali jako součin),
- $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6$ (součin jsme napsali jako mocninu).

Pro každé $a \in R$ a $n \in N$ platí: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-krát}}$.

To není žádný objev na pochopení, jde jen o zestručnění zápisu.

Ve všech následujících příkladech se snažíme vidět veškerá odvozená pravidla a úpravy jako důsledek definice mocniny.

Terminologie:

- a^n - mocnina
- a - základ mocniny (mocnětec)
- n - exponent (mocnitel)

Pozor:

$$(-2)^4 = 16 \quad \text{Umocňujeme číslo } -2.$$

$$-2^4 = -16 \quad \text{Umocňujeme číslo } 2, \text{ pak násobíme } -1 \text{ (umocňování má přednost před násobením).}$$

Př. 1: Doplně větu: Pro každé $a \in R$ a každé $n \in N$ platí:

$$a^1 = \quad , \quad 1^n = \quad , \quad 0^n = \quad .$$

Důsledky definice mocniny.

Pro každé $a \in R$ a každé $n \in N$ platí:

- $a^1 = a$,
- $1^n = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{n\text{-krát}} = 1$,
- $0^n = \underbrace{0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot \dots \cdot 0}_{n\text{-krát}} = 0$.

Pedagogická poznámka: Už v předchozím příkladu dělají někteří studenti chybu, nejčastěji $1^n = n \cdot 1$. Tento omyl vychází z předpokladu, že číslo v exponentu slouží k násobení základu mocniny.

Př. 2: Platí například $(-2)^2 = 4$, $(-2)^3 = -8$. Na dalších příkladech zjisti, jak závisí znaménko mocniny na hodnotách čísel a a n . Postřehy co nejexaktněji ověř a zjištěné skutečnosti zapiš do přehledné tabulky.

Zkoušíme:

$$2^1 = 2; 2^2 = 4; 2^3 = 8; 2^4 = 16$$

$$3^1 = 3; 3^2 = 9; 3^3 = 27; 3^4 = 81$$

$$(-2)^1 = -2; (-2)^2 = 4; (-2)^3 = -8; (-2)^4 = 16$$

$$(-3)^1 = -3; (-3)^2 = 9; (-3)^3 = -27; (-3)^4 = 81$$

Postřehy:

- umocňováním kladného čísla, získáme vždy kladné číslo,
- umocňováním záporného čísla na lichý exponent, získáme vždy záporné číslo,
- umocňováním záporného čísla na sudý exponent, získáme vždy kladné číslo.

Ověření:

- Umocňováním kladného čísla, získáme vždy kladné číslo.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-krát}} - \text{součin kladných čísel} \Rightarrow \text{výsledek je kladný.}$$

- Umocňováním záporného čísla na lichý exponent, získáme vždy záporné číslo.
 $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-krát (lichý počet)}} = \underbrace{a \cdot a}_{\text{dvojice}} \cdot \underbrace{a \cdot a}_{\text{dvojice}} \cdot \dots \cdot a$ - čísla v součinu jsme rozdělili do dvojic, jednotlivé dvojice dají kladná čísla, jedno a zůstane (je jich lichý počet) \Rightarrow výsledek je záporný.
- Umocňováním záporného čísla na sudý exponent, získáme vždy kladné číslo.
 $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-krát (sudý počet)}} = \underbrace{a \cdot a}_{\text{dvojice}} \cdot \underbrace{a \cdot a}_{\text{dvojice}} \cdot \dots \cdot \underbrace{a \cdot a}_{\text{dvojice}}$ - čísla v součinu jsme rozdělili do dvojic, jednotlivé dvojice dají kladná čísla, žádné a nezůstane (je jich sudý počet) \Rightarrow výsledek je kladný.

Znaménka mocnin:

- $a > 0, n \in \mathbb{N}$ (libovolný exponent) $\Rightarrow a^n > 0$
- $a < 0, n = 2k$ (sudý exponent) $\Rightarrow a^n > 0$ $(-2)^4 = 16$
- $a < 0, n = 2k + 1$ (lichý exponent) $\Rightarrow a^n < 0$ $(-2)^3 = -8$

Pedagogická poznámka: Myslím, že je velice vhodné nechat studenty, aby se chvíli trápili sami. I strategie, se kterou zkouší mocniny (a vybírají si čísla na umocňování), je důležitá a je možné ji korigovat během jejich samostatné práce. Při zkontrolování je pak dobré zmínit, že na zkoušení vybíráme čísla „rozdílná“, zkouška na příkladech není důkaz.

Př. 3: Spočti mocniny.

a) 6^1	b) $(-2)^4$	c) -2^2	d) $(-2)^5$	e) $-(-3^2)$
f) $\left(\frac{1}{10}\right)^3$	g) 0^{1415}	h) 1^{2011}	i) -1^{1918}	j) $(-1)^{1620}$

a) $6^1 = 6$	b) $(-2)^4 = 16$	c) $-2^2 = -4$	d) $(-2)^5 = -32$
e) $-(-3^2) = -(-9) = 9$	f) $\left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{1000}$	g) $0^{1415} = 0$	h) $1^{2011} = 1$
	i) $-1^{1918} = -1$		j) $(-1)^{1620} = 1$

Pedagogická poznámka: Pokud někdo udělá chybu, vždy se snažím, aby si uvědomil, že správné řešení přímo vyplývá z dodržení pravidla $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-krát}}$. Cílem, je, aby studenti uvědomili, že existuje poměrně malé množství základních pravidel, které je nutné za všech okolností dodržovat (a to vede ke správnému výsledku) a jejich nedodržování ústí v chyby (a jejich chyby měly stejný prapočátek). Poslední čtyři body předchozího příkladu jsou zároveň opakováním dějepisu. Letopočet 2013 (původně 2007) připomíná rok, ve kterém jsem se stal matikářem 4.2017 (4B2011), a je určen k nahrazení.

Př. 4: Odstraň závorky. a) $(-a)^3$ b) $(-b)^6$ c) $(-c)^9$ d) $(-d)^{2n}$

- a) $(-a)^3 = -a^3$ (lichý exponent \Rightarrow mínus zůstává)
- b) $(-b)^6 = b^6$ (sudý exponent \Rightarrow mínus mizí)

c) $(-c)^9 = -c^9$ (lichý exponent \Rightarrow mínus zůstává)

d) $(-d)^{2n} = d^{2n}$ ($2n$ je určitě sudé číslo \Rightarrow sudý exponent \Rightarrow mínus mizí)

Př. 5: Vysvětli, proč platí $(-b)^2 = b^2$. Platí podobná rovnost i pro jiné exponenty?

$(-b)^2 \Rightarrow$ umocňujeme na sudou mocninu \Rightarrow mínus mizí $\Rightarrow (-b)^2 = b^2$.

Podobná rovnost bude platit i pro všechny sudé exponenty: $(-b)^4 = b^4$, $(-b)^6 = b^6$, ...

Př. 6: Spočti na kalkulačce $(3-\sqrt{2})^2$ a $(\sqrt{2}-3)^2$. Vysvětli? Co bude platit pro mocniny $(a-b)^{2n}$ a $(b-a)^{2n}$?

- $(3-\sqrt{2})^2 = 2,51471862576\dots$

- $(\sqrt{2}-3)^2 = 2,51471862576\dots$

Jde o stejný případ jako v předchozím příkladu. Čísla $3-\sqrt{2}$ a $\sqrt{2}-3$ se liší pouze ve znaménku, které při umocňování na druhou zmizí (stejně jako $(-b)^2 = b^2$).

$$(\sqrt{2}-3)^2 = [-(3-\sqrt{2})]^2 = (3-\sqrt{2})^2$$

Mocniny $(a-b)^{2n} = (b-a)^{2n}$ (jde o obecný zápis předchozího příkladu, kde $a=3$ a $b=\sqrt{2}$ (nebo obráceně).

$$(b-a)^{2n} = [-(a-b)]^{2n} = (a-b)^{2n}$$

Př. 7: Vypočti. a) $2^2 - (-2)^3 + 2 \cdot 2^2 - (-4)^2$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (-4^2) \cdot (-3)^2$

a) $2^2 - (-2)^3 + 2 \cdot 2^2 - (-4)^2 = 4 - (-8) + 2 \cdot 4 - 16 = 4$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (-4^2) \cdot (-3)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-16)(9) = -\frac{16}{8} \cdot 9 = -18$

Pedagogická poznámka: Pozor při výpočtu bodu b) postupují někteří studenti zbytečně

složitě: $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (-4^2) \cdot (-3)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-16)(9) = -\frac{144}{8} = -18$. Tento postup není

zas takovým zdržením, pokud mají k dispozici kalkulačku. Pokud ne (a já jim pro tyto výpočty kalkulačky zakazuji, protože bez nich je počítání rychlejší a studenti získávají odhad čísel), jde o značné zdržení. Zdržení je navíc zbytečné, protože logické je nejdřív krátit a pak teprve násobit. Více o logice úprav v hodině 010604 KISS.

Př. 8: Vypočti. a) $0^2 \cdot (-2)^5 - (-3)^2 \cdot (-1)^{99} + (-3)^3$

b) $2(-a)^2 - a(a-2) + a^1 + 2^2 \cdot a^2$ c) $\frac{b^2 \cdot (-b)^3 \cdot 4^2 \cdot b^1}{b^4 \cdot 2^3}$

a) $0^2 \cdot (-2)^5 - (-3)^2 \cdot (-1)^{99} + (-3)^3 = 0 - 9 \cdot (-1) - 27 = 9 - 27 = -18$

b) $2(-a)^2 - a(a-2) + a^1 + 2^2 \cdot a^2 = 2a^2 - a^2 + 2a + a + 4a^2 = 5a^2 + 3a$

c) $\frac{b^2 \cdot (-b)^3 \cdot 4^2 \cdot b^1}{b^4 \cdot 2^3} = \frac{b^2 \cdot (-b^3) \cdot 4^2 \cdot b}{b^4 \cdot 2^3} = -\frac{b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot 16 \cdot b}{b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot 8} = -2b^2$

Shrnutí: $a^3 = a \cdot a \cdot a$ a z toho je všechno jasné.