1.6.3 Vzorce pro mocniny II

Předpoklady: 010602

Př. 1: Zjednoduš výrazy.

a) $\dfrac{2^5\cdot 2^7}{2^{10}}$ b) $\dfrac{(-3)^3\cdot(-3)^6}{(-3)^5\cdot 3^2}$ c) $\dfrac{3^{15}}{3^2\cdot 3^7}$ d) $\dfrac{(-2)^5\cdot 2^6}{(-2)^4\cdot 2^2}$

a) $\dfrac{2^5\cdot 2^7}{2^{10}}=\dfrac{2^{5+7}}{2^{10}}=\dfrac{2^{12}}{2^{10}}=2^{12-10}=2^2$

b) $\dfrac{(-3)^3\cdot(-3)^6}{(-3)^5\cdot 3^2}=\dfrac{-3^3\cdot 3^6}{-3^5\cdot 3^2}=\dfrac{3^3\cdot 3^6}{3^5\cdot 3^2}=\dfrac{3^{3+6}}{3^{5+2}}=\dfrac{3^9}{3^7}=3^{9-7}=3^2$

c) $\dfrac{3^{15}}{3^2\cdot 3^7}=3^{15-2-7}=3^6$

d) $\dfrac{(-2)^5\cdot 2^6}{(-2)^4\cdot 2^2}=\dfrac{-2^5\cdot 2^6}{2^4\cdot 2^2}=-\dfrac{2^{11}}{2^6}=-2^5$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklady slouží k opakování.

Př. 2: Najdi a dokaž pravidlo pro zjednodušení výrazu: $\left(a^r\right)^s$.

Pro každé $a\in R$ a $r,s\in N$ platí: $\left(a^r\right)^s=a^{r\cdot s}$.

Důkaz: $\left(a^r\right)^s=\underbrace{a^r\cdot a^r\cdot a^r\cdot\ldots\cdot a^r}_{s-\text{krát}}=\underbrace{\overbrace{a\cdot a\cdot a\ldots a}^{r-\text{krát}}\ldots\overbrace{a\cdot a\cdot a\ldots a}^{r-\text{krát}}\ldots\overbrace{a\cdot a\cdot a\ldots a}^{r-\text{krát}}}_{s-\text{krát}}=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{(s\cdot r)-\text{krát}}=a^{r\cdot s}$

V součinu je *s*-krát *r*-krát *a*, dohromady je tam *a* přesně $r\cdot s$-krát.

Př. 3: Odstraň závorky z výrazů.

a) $\left(2^3\right)^5$ b) $\left((-\pi)^3\right)^4$ c) $\left(-(3)^4\right)^3$

a) $\left(2^3\right)^5=2^{3\cdot 5}=2^{15}$

b) $\left((-\pi)^3\right)^4=(-\pi)^{3\cdot 4}=(-\pi)^{12}=\pi^{12}$

c) $\left(-(3)^4\right)^3=-3^{4\cdot 3}=-3^{12}$ (na čtvrtou umocňujeme pouze 3, ne mínus)

Př. 4: Najdi a dokaž pravidlo pro odstranění závorek ve výrazu: $(a\cdot b)^r$.

Pro každé $a,b\in R$ a $r\in N$ platí: $(a\cdot b)^r=a^r\cdot b^r$.

Důkaz: $(a\cdot b)^r = \underbrace{(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)....(a\cdot b)}_{r-\text{krát}} = \underbrace{a\cdot a\cdot a...a}_{r-\text{krát}}\cdot\underbrace{b\cdot b\cdot b...b}_{r-\text{krát}} = a^r\cdot b^r$

Př. 5: Vypočti. Výsledek uveď jako součin mocnin.

a) $(2\cdot 3)^2$ b) $(2^3\cdot 3)^4$ c) $3(a^2\cdot b^3)^3$

d) $\dfrac{(a^2\cdot b^3)^3\cdot a^4}{(a^3\cdot b^2)^3}$ e) $[(-a)\cdot b]^3(-a^4b^3)^5$

a) $(2\cdot 3)^2 = 2^2\cdot 3^2$

b) $(2^3\cdot 3)^4 = (2^3)^4\cdot 3^4 = 2^{12}\cdot 3^4$

c) $3(a^2\cdot b^3)^3 = 3(a^2)^3\cdot(b^3)^3 = 3a^6\cdot b^9$

d) $\dfrac{(a^2\cdot b^3)^3\cdot a^4}{(a^3\cdot b^2)^3} = \dfrac{a^6\cdot b^9\cdot a^4}{a^9\cdot b^6} = \dfrac{a^{10}\cdot b^9}{a^9\cdot b^6} = ab^3$

e) $[(-a)\cdot b]^3(-a^4b^3)^5 = (-a)^3\cdot b^3(-a^4)^5(b^3)^5 = -a^3\cdot b^3(-a^{20})b^{15} = a^{23}b^{18}$

Pedagogická poznámka: V bodě se často objevuje následující chyba $3(a^2\cdot b^3)^3 = 3(a^2)^3\cdot 3(b^3)^3 = 9a^6\cdot b^9$ zdůvodňovaná tím, že ve výrazu je přece závorka, která se musí roznásobit. Při vysvětlování je třeba se vrátit ke konkrétním číslům, na nichž se dá dokázat, že na rozdíl od sčítání u násobení je takové roznásobení nesprávné.

Př. 6: Najdi a dokaž pravidlo pro odstranění závorek ve výrazu: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r$.

Pro každé $a,b\in R$, $b\neq 0$ a $r\in N$ platí: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \overbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}^{r-\text{krát}} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{r-\text{krát}}}{\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{r-\text{krát}}} = \frac{a^r}{b^r}$$

Př. 7: Zjednoduš.

a) $\left(\dfrac{a^2}{b^3}\right)^2$ b) $\left(-\dfrac{2}{3^2}\right)^3$ c) $\left(\dfrac{(-2)}{3^2}\right)^4$

a) $\left(\dfrac{a^2}{b^3}\right)^2 = \dfrac{(a^2)^2}{(b^3)^2} = \dfrac{a^4}{b^6}$ b) $\left(-\dfrac{2}{3^2}\right)^3 = -\dfrac{2^3}{(3^2)^3} = -\dfrac{2^3}{3^6}$

c) $\left(\frac{(-2)}{3^2}\right)^4 = \frac{(-2)^4}{(3^2)^4} = \frac{2^4}{3^8}$

Př. 8: Zjednoduš. a) $\frac{2(a^2b)^3}{b^2}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^2$ b) $\left[\frac{a^2\cdot b^7}{b^2\cdot(-a)^4}\cdot\frac{(-a)^3}{b^3}\right]^2$

a) $\frac{2(a^2b)^3}{b^2}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{2a^6b^3}{b^2}\cdot\frac{b^2}{a^2} = 2a^4b^3$

b) $\left[\frac{a^2\cdot b^7}{b^2\cdot(-a)^4}\cdot\frac{(-a)^3}{b^3}\right]^2 = \left[\frac{a^2\cdot b^7}{b^2\cdot a^4}\cdot\frac{-a^3}{b^3}\right]^2 = \left(-a\cdot b^2\right)^2 = a^2b^4$

Pedagogická poznámka: V bodě a) bývá opět stejná chyba jako v bodě 5 c). V takovém případě už je nutné být trochu důraznější.

Př. 9: Vyjádři jako součin mocnin prvočísel $\frac{8^2\cdot 6^3}{4^3\cdot 12}$.

$\frac{8^2\cdot 6^3}{4^3\cdot 12} = \frac{(2^3)^2\cdot(2\cdot 3)^3}{(2^2)^3\cdot 2^2\cdot 3} = \frac{2^6\cdot 2^3\cdot 3^3}{2^6\cdot 2^2\cdot 3} = 2\cdot 3^2$

Př. 10: Vyjádři jako součin mocnin prvočísel $\frac{12^6\cdot 4^3\cdot 15^4}{50^2\cdot 16^4\cdot 9^4}$.

Pedagogická poznámka: Řešení předchozího příkladu není uvedeno schválně. Začínáme s ním před koncem hodiny, nechávám ho na domácí počítání a kontrolujeme ho společně na začátku další hodiny. Právě různé způsoby jeho řešení jsou východiskem pro náš další postup.

Př. 11: Sbírka příklad 4, 5, 6.

Př. 12: Petáková:
strana 62/cvičení 39 a) c)
strana 62/cvičení 44 a)

Shrnutí: $a^3 = a\cdot a\cdot a$ a z toho je všechno jasné.