

1.6.4 KISS

Předpoklady: 010603

Pedagogická poznámka: Následující příklady neslouží ani tolik k procvičování mocnin jako výcviku „systematického postupného upravování“. Podobná kapitola se v žádné učebnici samozřejmě nevyskytuje (nic nového se v této hodině také neprobírá), přesto moje zkušenosti ukazují, že tato hodina může být velice přínosná. Úspěch při výpočtech nezávisí jenom na znalosti a dodržování pravidel, ale i na takovém způsobu výpočtu, který zabraňuje (spíše však maximálně omezuje) možnost náhodných chyb.

Pedagogická poznámka: Způsob řešení následujícího příkladu je hodně individuální. Objeví se řešení podobná tomu níže, někteří to spočítají ideálně podle zásad popsanych níže, jiní používají postupy ještě daleko těžkopádnější.

Řešení příkladu z minulé hodiny:

$$\begin{aligned} \frac{12^6 \cdot 4^3 \cdot 15^4}{50^2 \cdot 16^4 \cdot 9^4} &= \frac{(2 \cdot 2 \cdot 3)^6 \cdot (2 \cdot 2)^3 \cdot (3 \cdot 5)^4}{(2 \cdot 5 \cdot 5)^2 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)^4 \cdot (3 \cdot 3)^4} = \frac{2^6 \cdot 2^6 \cdot 3^6 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^4}{2^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 \cdot 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4} = \\ &= \frac{2^6 \cdot 2^6 \cdot 3^6 \cdot 2^6 \cdot \cancel{3^4} \cdot 5^4}{2^6 \cdot 5^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 \cdot \cancel{3^4} \cdot 3^4} = \frac{2^6 \cdot 2^6 \cdot 2^6 \cdot \cancel{5^4}}{2^6 \cdot \cancel{5^4} \cdot 2^{12}} 3^2 = \frac{2^{18}}{2^{12}} 3^2 = 2^6 3^2 = 9 \end{aligned}$$

Výše uvedený postup má daleko k ideálu:

- v některých okamžicích bylo ve zlomku velké množství čísel,
- najednou jsme dělali nesouvisející operace,
- není jasné, co jsme v kterém kroku zrovna prováděli.

⇒ Ačkoliv jsme naštěstí získali správný výsledek, náš postup nebyl ideální protože:

- hrozila velká pravděpodobnost náhodné chyby,
- případnou chybu bychom špatně hledali.

⇒ **Nezáleží pouze na dodržování pravidel, ale také na strategii.**

Co by měla správná strategie obsahovat?

- Nemíchat různé věci do sebe.
- Snažit se stále o co největší jednoduchost a přehlednost.
- Zmenšovat počet členů, které musíme opisovat.

Podobné zásady se v programování shrnují do hesla: **KISS = keep it small and stupid (udržuj to malé a jasné)**.

Jak používat KISS v matematice?

- Některé operace (krácení, vytvoření mocnin ..) výraz zjednodušují ⇒ použijeme je co nejdříve.
- Jiné operace (násobení, odstraňování závorek...) výraz zesložitují ⇒ použijeme je až jako poslední, po co největším zjednodušení ostatního.
- V jednom okamžiku se budeme snažit provádět stejné úpravy, nebudeme plést několik věcí dohromady.
- Opisujeme tak, aby původní výraz a jeho úprava „zůstaly na stejném místě“.

Př. 1: Vyjádři pomocí mocnin prvočísel výraz $\frac{12^6 \cdot 4^3 \cdot 15^4}{50^2 \cdot 16^4 \cdot 9^4}$.

Před vlastním řešením nejdříve zvol strategii zjednodušování tak, abys dodržel zásadu KISS (keep it small and stupid).

Snažíme se udržovat příklad přehledný a jednoduchý \Rightarrow všechny úpravy, kdy se zesložit'uje, provedeme, až když budeme mít části, kterých se týká, co nejjednodušší.

\Rightarrow Upravíme „vnitřky“ co nejvíce před:

- odstraněním závorek,
- krácením ve zlomcích,
- dáváním zlomků dohromady.

Postup dalšího výpočtu budeme psát vždy na konec řádku.

$$\frac{12^6 \cdot 4^3 \cdot 15^4}{50^2 \cdot 16^4 \cdot 9^4} = \quad (\text{čísla nahradíme prvočíselnými rozklady})$$

$$\frac{(2^2 \cdot 3)^6 \cdot (2^2)^3 \cdot (3 \cdot 5)^4}{(2 \cdot 5^2)^2 \cdot (2^4)^4 \cdot (3^2)^4} = \quad (\text{odstraníme závorky})$$

$$\frac{2^{12} \cdot 3^6 \cdot 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^4}{2^2 \cdot 5^4 \cdot 2^{16} \cdot 3^8} = \quad (\text{upravíme číselník a jmenovatel zlomku})$$

$$\frac{2^{12+6} \cdot 3^{6+4} \cdot 5^4}{2^{2+16} \cdot 5^4 \cdot 3^8} = \frac{2^{18} \cdot 3^{10} \cdot 5^4}{2^{18} \cdot 5^4 \cdot 3^8} \quad (\text{zjednodušíme zlomek})$$

$$= 3^{10-8} = 3^2 = 9$$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad počítáme na tabuli. Vždy si řekneme, jaké úpravy provedeme, studenti je udělají v sešitě, já na tabuli (zezadu) a pak je kontrolujeme.

Pedagogická poznámka: I u dalších příkladů bych asi doporučoval společný postup, kdy se společně dohodneme na příštím kroku, který žáci provedou a ihned přemýšlí o dalším postupu. Pak se společně zkontroluje předchozí krok, domluví se další postup a žáci ho opět samostatně provedou.

Př. 2: Vypočti. Před vlastním řešením nejdříve zvol strategii zjednodušování tak, abys dodržel zásadu KISS (keep it small and stupid).

$$\text{a) } \frac{3(a^3b^2)^3}{(2a^2b)^2} \cdot \left(\frac{2a^4b^3}{a^3b}\right)^3 \quad \text{b) } \left(\frac{2a^5b^4}{3a^3b}\right)^3 : \frac{(2a^3b^2)^3}{9(2a^2b)^2}$$

a)

$$\frac{3(a^3b^2)^3}{(2a^2b)^2} \cdot \left(\frac{2a^4b^3}{a^3b}\right)^3 = \quad (\text{vlevo odstraníme závorky, vpravo upravíme zlomek})$$

$$\frac{3a^9b^6}{2^2a^4b^2} \cdot (2ab^2)^3 = \quad (\text{vlevo upravíme zlomek, vpravo odstraníme závorku})$$

$$\frac{3}{2^2} a^5 b^4 \cdot 2^3 a^3 b^6 = \quad (\text{obě části výrazu dáme dohromady})$$

$$2^{3-2} \cdot 3 \cdot a^{5+3} b^{4+6} = 6a^8 b^{10}$$

b)

$$\left(\frac{2a^5 b^4}{3a^3 b}\right)^3 : \frac{(2a^3 b^2)^3}{9(2a^2 b)^2} = \quad (\text{vlevo upravíme zlomek, vpravo odstraníme závorky})$$

$$\left(\frac{2}{3} a^2 b^3\right)^3 : \frac{2^3 a^9 b^6}{3^2 \cdot 2^2 a^4 b^2} = \quad (\text{vlevo odstraníme závorku, vpravo upravíme zlomek})$$

$$\left(\frac{2^3}{3^3} a^6 b^9\right) : \left(\frac{2}{3^2} a^5 b^4\right) = \quad (\text{vydělíme obě části výrazu})$$

$$\frac{2^3}{3^3} a^{6-5} b^{9-4} = \frac{4}{3} ab^5$$

Př. 3: Vyjádři pomocí mocnin prvočísel výraz $\frac{(18^2 \cdot 4^3)^3}{(6^4 \cdot 24^2)^2} \cdot \left(\frac{25 \cdot 3 \cdot 8^3}{16^2 \cdot 30}\right)^3$.

Před vlastním řešením nejdříve zvol strategii zjednodušování tak, abys dodržel zásadu KISS (keep it small and stupid).

$$\frac{(18^2 \cdot 4^3)^3}{(6^4 \cdot 24^2)^2} \cdot \left(\frac{25 \cdot 3 \cdot 8^3}{16^2 \cdot 30}\right)^3 \quad (\text{složená čísla rozložíme na prvočísla})$$

$$\frac{([2 \cdot 3^2]^2 \cdot [2^2]^3)^3}{([2 \cdot 3]^4 \cdot [2^3 \cdot 3]^2)^2} \cdot \left(\frac{5^2 \cdot 3 \cdot [2^3]^3}{[2^4]^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}\right)^3 \quad (\text{odstraníme vnitřní hranaté závorky})$$

$$\frac{(2^2 \cdot 3^4 \cdot 2^6)^3}{(2^4 \cdot 3^4 \cdot 2^6 \cdot 3^2)^2} \cdot \left(\frac{5^2 \cdot 3 \cdot 2^9}{2^8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}\right)^3 \quad (\text{vlevo zjednodušíme číselník a jmenovatel, vpravo zjednodušíme celý zlomek})$$

$$\frac{(2^8 \cdot 3^4)^3}{(2^{10} \cdot 3^6)^2} \cdot 5^3 \quad (\text{vlevo odstraníme závorky})$$

$$\frac{2^{24} \cdot 3^{12}}{2^{20} \cdot 3^{12}} \cdot 5^3 \quad (\text{vlevo zjednodušíme zlomek})$$

$$2^4 \cdot 5^3$$

Př. 4: Vyjádři pomocí mocnin prvočísel výraz $\frac{5 \cdot (15^2 \cdot 48)^2}{(15 \cdot 12)^3 \cdot 8^2} \cdot \left(\frac{[12 \cdot 5]^6 \cdot 16^2}{[25 \cdot 18]^3 \cdot 32^3} \right)^2$.

Před vlastním řešením nejdříve zvol strategii zjednodušování tak, abys dodržel zásadu KISS (keep it small and stupid).

$$\frac{5 \cdot (15^2 \cdot 48)^2}{(15 \cdot 12)^3 \cdot 8^2} \cdot \left(\frac{[12 \cdot 5]^6 \cdot 16^2}{[25 \cdot 18]^3 \cdot 32^3} \right)^2 =$$

(složená čísla rozložíme na prvočísla)

$$\frac{5 \cdot ([3 \cdot 5]^2 \cdot 2^4 \cdot 3)^2}{(5 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 3)^3 \cdot [2^3]^2} \cdot \left(\frac{[2^2 \cdot 3 \cdot 5]^6 \cdot [2^4]^2}{[5^2 \cdot 2 \cdot 3^2]^3 \cdot [2^5]^3} \right)^2 =$$

(odstraníme vnitřní hranaté závorky)

$$\frac{5 \cdot (3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^4 \cdot 3)^2}{(5 \cdot 3^2 \cdot 2^2)^3 \cdot 2^6} \cdot \left(\frac{2^{12} \cdot 3^6 \cdot 5^6 \cdot 2^8}{5^6 \cdot 2^3 \cdot 3^6 \cdot 2^{15}} \right)^2 =$$

(vlevo nahoře zjednodušíme vnitřek závorky, vlevo dole odstraníme závorku, vpravo zjednodušíme čítele a jmenovatel zlomku)

$$\frac{5 \cdot (3^3 \cdot 5^2 \cdot 2^4)^2}{5^3 \cdot 3^6 \cdot 2^6 \cdot 2^6} \cdot \left(\frac{2^{20} \cdot 3^6 \cdot 5^6}{5^6 \cdot 2^{18} \cdot 3^6} \right)^2 =$$

(vlevo nahoře odstraníme závorku, vlevo dole zjednodušíme jmenovatel, vpravo zjednodušíme zlomek)

$$\frac{5 \cdot 3^6 \cdot 5^4 \cdot 2^8}{5^3 \cdot 3^6 \cdot 2^{12}} \cdot (2^2)^2 =$$

(vlevo zjednodušíme čítele a zkrátíme zlomek, vpravo odstraníme závorku)

$$\frac{5^5 \cdot 2^8}{5^3 \cdot 2^{12}} \cdot 2^4 =$$

$$5^2 \frac{2^8}{2^{12}} \cdot 2^4 = 5^2$$

Pedagogická poznámka: Při hodinách trvám na tom, aby studenti počítali pod KISS. Při písenských je styl výpočtu jejich věcí, ale při hodinách tlačím i na správnou strategii.

Př. 5: Sbírka příklad 7.

Př. 6: Petáková:
strana 62/cvičení 44 a)

Shrnutí: Pokud se nechceme při zjednodušování výrazů udít k smrti, musíme dodržovat zásadu KISS (keep it small and stupid – udržuj to jednoduché a přehledné).