

1.6.5 Mocniny s celým mocnitelem I

Předpoklady:

Pedagogická poznámka: Nečekám, až bude mít celá třída oba první příklady. Poté, co většina pomalejších dokáže dopočítat první příklad, jdeme na příklad 3.

Př. 1: Vypočti $\left(\frac{4x^2y^3}{2xy^2}\right)^3 \cdot \frac{8(3xy^2)^3}{(2xy^3)^2}$. Dodržuj KISS.

$$\left(\frac{4x^2y^3}{2xy^2}\right)^3 \cdot \frac{8(3xy^2)^3}{(2xy^3)^2} = (2xy)^3 \cdot \frac{2^3 \cdot 3^3 x^3 y^6}{2^2 x^2 y^6} = 2^3 x^3 y^3 \cdot 2 \cdot 3^3 x = 2^4 \cdot 3^3 x^4 y^3$$

Př. 2: Vyjádři pomocí mocnin prvočísel výraz $\left(\frac{15^2 \cdot 6^2 \cdot 8}{10 \cdot 4^2}\right)^3 : \left(\frac{4^3 \cdot 9^2}{12^3 \cdot 6}\right)^2$. Dodržuj KISS.

$$\begin{aligned} \left(\frac{15^2 \cdot 6^2 \cdot 8}{10 \cdot 4^2}\right)^3 : \left(\frac{4^3 \cdot 9^2}{12^3 \cdot 6}\right)^2 &= \left(\frac{[3 \cdot 5]^2 \cdot [2 \cdot 3]^2 \cdot 2^3}{2 \cdot 5 \cdot [2^2]^2}\right)^3 : \left(\frac{[2^2]^3 \cdot [3^2]^2}{[2^2 \cdot 3]^3 \cdot 2 \cdot 3}\right)^2 = \\ &= \left(\frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 2^3}{2 \cdot 5 \cdot 2^4}\right)^3 : \left(\frac{2^6 \cdot 3^4}{2^6 \cdot 3^3 \cdot 2 \cdot 3}\right)^2 = (3^4 \cdot 5)^3 : \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3^{12} \cdot 5^3 \cdot 2^2 \end{aligned}$$

Př. 3: Které z následujících dvou pravidel je matematicky hezčí?

a) Pro každé $a \in R$ a $r, s \in N$ platí: $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$.

b) Pro každé $a \in R$, $a \neq 0$ a $r, s \in N$, $r > s$ platí: $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$.

Základní požadavek na krásu matematického pravidla: Musí být co nejobecnější s minimem

výjimek \Rightarrow pravidlo pro podíl mocnin moc krásy nepobralo: $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$, platí když $r > s$

(ošklivá podmínka).

Použití pravidla pro podíl je jasné, například: $\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$. Nemohli bychom ho upravit tak,

aby fungovalo vždy a podmínku jsme mohli vypustit?

Zkusíme, o se děje, když podmínka $r \leq s$ neplatí?

Zkusíme $r = s$.

Podle pravidla:

Podle významu mocniny

$$\frac{a^r}{a^r} = a^{r-r} = a^0.$$

$$\frac{a^r}{a^r} = \frac{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)} = 1 \text{ všechno se pokrátí,}$$

nahore i dole je a r -krát.

Pokud má být matematika bezesporná, musíme oběma způsoby získat stejný výsledek \Rightarrow platí: $a^0 = 1$.

Není to úplně nerozumné, mocnitel říká kolikrát se a opakuje v součinu, když je mocnitel 0, nebude a v součinu ani jednou a zůstane tam pouze jednička (kterou můžeme připsat do jakéhokoliv součinu aniž by ho změnila).

Zatím to vypadá, že platí: $\frac{a^r}{a^r} = a^{r-r} = a^0 = 1$.

Zkusíme $r < s$ (konkrétní hodnoty).

Podle pravidla:

$$\frac{a^3}{a^7} = a^{3-7} = a^{-4}$$

Podle významu mocniny

$$\frac{a^3}{a^7} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^4}$$

Pokud má být matematika bezesporná, musíme oběma způsoby získat stejný výsledek \Rightarrow

platí: $a^{-4} = \frac{1}{a^4}$.

Opět je docela rozumné, mocnitel říká kolikrát se a opakuje v součinu. když mocnitel zmenšujeme, ubývá a v součinu (je to stejné jako bychom počet a v součinu neměnili, ale součin zapsali do zlomku, ve kterém budeme postupně přidávat a do jmenovatel). Pokud bude mocnitel menší než nula, musí v být součinu a méně než žádné $\Rightarrow a$ se objeví ve jmenovateli.

Zkusíme $r < s$ (obecně).

Podle pravidla:

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \quad (r - s < 0 \text{ -záporné číslo})$$

Podle významu mocniny

$$\frac{a^r}{a^s} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}^{r\text{-krát}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{s\text{-krát}}} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{s-r\text{-krát}}} = \frac{1}{a^{s-r}}$$

($s - r > 0$, kladné číslo, opačné k $r - s$)

Získali jsme stejný výsledek jako před chvílí: musí platit $a^{r-s} = \frac{1}{a^{s-r}} = \frac{1}{a^{-(r-s)}}$

Závěr: Vzorec $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ můžeme používat vždy (tedy bez podmínky), pokud zavedeme

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2} \text{ (obecně } a^{-m} = \frac{1}{a^m}, a \neq 0).$$

Pro všechna $a \in R, a \neq 0$ platí $a^0 = 1$.

Pro každé $a \in R, a \neq 0$ a pro každé $m \in N$ platí: $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ (např. $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$).

Pedagogická poznámka: Doporučuji žákům, aby si význam záporného exponentu raději pamatovali na konkrétním příkladu $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ než na obecném vzorci $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, ze kterého nejsou znaménka bez předchozí podmínky zcela zřejmá).

Př. 4: Vyjádři jako zlomek.

- a) a^{-2} b) 10^{-2} c) 3^{-1} d) 2^{-4}

a) $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ b) $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0,01$

c) $3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$ d) $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

Př. 5: Odstraň mocninu.

- a) 2^{-2} b) $(-2)^{-2}$ c) $(-2)^{-3}$ d) 2^{-3} e) $(\sqrt{2})^{-4}$

a) $2^{-2} = \frac{1}{4}$ b) $(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$

c) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$ d) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

e) $(\sqrt{2})^{-4} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{1}{\left((\sqrt{2})^2\right)^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ nebo jinak $(\sqrt{2})^{-4} = \frac{1}{(\sqrt{2})^4} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

⇒ **Záporné znaménko v exponentu neovlivňuje znaménko mocniny, o znaménku rozhoduje znaménko základu mocniny a sudost nebo lichost exponentu.**

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je důležitý, část studentů pravidelně považuje záporné mocniny za záporná čísla. Podle definice je to zjevný nesmysl, ale oni neuvažují podle definic a pravidel.

Př. 6: Zapiš jako mocninu prvočísla.

- a) 49 b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{27}$ d) $\frac{1}{32}$

a) $49 = 7^2$ b) $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$

c) $\frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} = 3^{-3}$ d) $\frac{1}{32} = \frac{1}{2^5} = 2^{-5}$

Všechny vzorce pro mocniny s přirozeným mocnitelem platí i pro celočíselné mocnitele.

Př. 7: Vynechej v sešitě řádku a pak sepiš z paměti bez obracení stránek v sešitu všechny vzorce pro výpočty s mocninami. Jak si vzorce lépe zapamatovat?

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

$$a^r : a^s = a^{r-s}$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

Lépe se pamatují věci, které spolu souvisejí, nebo souvisí s něčím, co už známe.

Máme dvě dvojice vzorců:

- pro násobení a dělení: $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ a $a^r : a^s = a^{r-s}$ (v každém vzorci vystupuje dvojice svázaných operací: násobení se sčítáním, dělení s odčítáním).
- pro odstranění závorek při násobení a dělení: $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$ a $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

Dosud jsme u uvedených vzorců předpokládali, že exponenty mohou být pouze přirozená čísla. Úvaha z úvodu dnešní hodiny nám umožňuje pracovat v exponentu i se zápornými čísly \Rightarrow všechny vzorce platí pro celá (tedy i záporná) čísla v exponentu.

Pro každá dvě reálná čísla a, b a pro každá dvě celá čísla r, s (tudíž i záporná) platí:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

Je-li $a \neq 0$, pak $a^r : a^s = a^{r-s}$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$

Je-li $b \neq 0$, pak $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

Př. 8: Vyjádři co nejjednodušeji jako kladnou mocninu čísla většího než jedna.

a) $0,5^{-5}$

b) $0,02^{-3}$

c) $0,04^{-2}$

$$a) 0,5^{-5} = \left(\frac{5}{10}\right)^{-5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^5} = 2^5$$

$$b) 0,02^{-3} = \left(\frac{2}{100}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{50}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{50^3}} = \frac{1}{\frac{1}{50^3}} = 50^3$$

$$c) 0,04^{-2} = \frac{1}{0,04^2} = \frac{1}{\left(\frac{4}{100}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{25}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1^2}{25^2}} = \frac{1}{\frac{1}{25^2}} = 25^2$$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad (pro většinu studentů je těžké pochopit zadání) je vyrovnávací, většině třídy jenom ukázu bod a) a pokud není dost času, jdeme rovnou na příklad 7.

Pedagogická poznámka: Ještě než pustíte žáky na následující, příklad musíte spočítat na tabuli pár příkladů, ve kterých použijete záporný exponent. V opačném případě žáci budou při výpočtech záporné exponenty obcházet, čím jejich zavedení ztrácí své kouzlo.

Záporné exponenty můžeme ve výpočtech používat naprosto stejným jako přirozené.

- $2^{-3} \cdot 2^5 = 2^{-3+5} = 2^2$
- $(a^2)^{-3} = a^{2 \cdot (-3)} = a^{-6}$
- $\frac{3^{-1} \cdot 3^4}{3^2 \cdot 3^{-1}} = 3^{-1+4-2-(-1)} = 3^2 = 9$

Př. 9: Zjednoduš a výsledek zapiš tak, aby se v něm nevyskytovala záporná mocnina.

$$a) 3^{-15} \cdot 3^{23} \quad b) (2^7)^{-3} \quad c) \frac{4^8}{4^{-12}} \quad d) (2x)^{-4} \quad e) \frac{2^{-6}}{2^5}$$

$$f) \frac{a^{-3} \cdot a^6}{a^5 \cdot a^{-4}} \quad g) \left(\frac{2}{a^3}\right)^{-2} \cdot \frac{(a^{-2})^3}{(2a)^2} \quad h) \frac{2}{a^3} \cdot \left(\frac{1}{a^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{a^3}\right)^{-3}$$

$$a) 3^{-15} \cdot 3^{23} = 3^{-15+23} = 3^8$$

$$b) (2^7)^{-3} = 2^{7 \cdot (-3)} = 2^{-21} = \frac{1}{2^{21}}$$

$$c) \frac{4^8}{4^{-12}} = 4^{8-(-12)} = 4^{8+12} = 4^{20}$$

$$d) (2x)^{-4} = 2^{-4} \cdot x^{-4} = \frac{1}{16x^4}$$

$$e) \frac{2^{-6}}{2^5} = 2^{-6-5} = 2^{-11} = \frac{1}{2^{11}}$$

$$f) \frac{a^{-3} \cdot a^6}{a^5 \cdot a^{-4}} = a^{-3+6-5-(-4)} = a^2$$

$$g) \left(\frac{2}{a^3}\right)^{-2} \cdot \frac{(a^{-2})^3}{(2a)^2} = \frac{2^{-2}}{a^{-6}} \cdot \frac{a^{-6}}{2^2 a^2} = 2^{-2-2} \cdot a^{-6-(-6)-2} = 2^{-4} a^{-2} = \frac{1}{2^4 a^2}$$

$$h) \frac{2}{a^3} \cdot \left(\frac{1}{a^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{a^3}\right)^{-3} = \frac{2}{a^3} \cdot \frac{1}{a^4} \cdot \frac{2^{-3}}{a^{-9}} = \frac{2^{1-3}}{a^{3+4-9}} = \frac{2^{-2}}{a^{-2}} = \frac{a^2}{2^2}$$

Př. 10: Zjednoduř a výsledek zapiš tak, aby se v něm nevyskytovala záporná mocnina.

$$\text{a) } \left(\frac{a^{-2}}{b^3}\right)^{-2} \quad \text{b) } \left(\frac{a^2}{b^3}\right)^{-2} \cdot \frac{(a^{-2} \cdot b)^3}{(ab)^{-2}} \quad \text{c) } (a^2b)^{-2} \cdot (a^{-3})^{-2} \cdot b^4b^{-3}$$

$$\text{a) } \left(\frac{a^{-2}}{b^3}\right)^{-2} = \frac{a^4}{b^{-6}} = a^4b^6$$

$$\text{b) } \left(\frac{a^2}{b^3}\right)^{-2} \cdot \frac{(a^{-2} \cdot b)^3}{(ab)^{-2}} = \frac{a^{-4}}{b^{-6}} \cdot \frac{a^{-6} \cdot b^3}{a^{-2}b^{-2}} = \frac{a^{-10} \cdot b^3}{a^{-2}b^{-8}} = a^{-8}b^{11} = \frac{b^{11}}{a^8}$$

$$\text{c) } (a^2b)^{-2} \cdot (a^{-3})^{-2} \cdot b^4b^{-3} = a^{-4}b^{-2} \cdot a^6 \cdot b = a^2b^{-1} = \frac{a^2}{b}$$

Pedagogická poznámka: Náplní zbytku hodiny je samostatné počítání příkladů ze sbírky nebo z Petákové.

Př. 11: Sbíрка příklad 9
Sbíрка příklad 8 a) b) c) d) e)

Př. 12: Petáková:
strana 62/cvičení 37 b) f)
strana 62/cvičení 39 b) d) e) f)
strana 62/cvičení 40
strana 62/cvičení 42 a) b) d) e) g)

Shrnutí: Lépe a obecněji se nám počítá, když zavedeme, že platí $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$.