1.6.5 Mocniny s proměnnou v mocniteli

Předpoklady: 010603

Pedagogická poznámka: Kdysi dávno jsem celou problematiku řešil vypočtením jednoho příkladu na tabuli, ale když jsem 4B2011 vůbec nic neřekl a nechal je spočítat příklady samotné, objevilo se tolik krásných a zajímavých chyb, že jsem s nimi musel celou problematiku ještě probrat. Nakonec vznikla skoro celá hodina.
Přemýšlel jsem také nad tím, že bych proměnou používat v exponentu od začátku, ale nakonec jsem tento přístup zavrhl, právě kvůli tomu, že se ukazuje, kdo jak pečlivě přemýšlí o pravidlech, která se učíme.
Pokud to jenom trochu jde, je dobré nechat studenty samostatně spočítat příklad 1, nadělat chyby a pak o nich diskutovat. Právě proto, je část kapitoly odůvodňováním a rozborem chyb. Já osobně studentům před příkladem 1 říkám pouze, že jde o zkoušku flexibility a opravdu si myslím, že z toho, jak se z pro ně neznámou (i když z hlediska učitele nijak novou) situací vypořádají, se dá ledacos dozvědět o tom, jak matematiku ve skutečnosti umí.
Jednou z věci, která by měla z hodiny vyplynout, je poznání, že není nutné příliš dobře rozumět tomu, co vlastně mocniny představují, pokud jenom mechanicky počítáme známé příklady. Ve chvílích, kdy narazíme na problémy, nás však často může zachránit pouze správná představa o tom, co vlastně zápisy jako 3^{2n-3} znamenají. Při osobním vysvětlování v lavicích se studentům právě toto (spolu s nutností dodržovat pravidla) snažím ukazovat.

Pedagogická poznámka: Jedním z největších problémů ve středoškolské matematice je fakt, že velká část studentů vnímá neznámé („písmenka“) jako něco zcela jiného než čísla a při počítání s nimi přestávají dodržovat všechna pravidla. Chyby uvedené dále dělají studenti, kteří počítání s čísly provádějí bez problémů.

Př. 1: Spočti.

a) $2^{n+2}\cdot 2^{2n-3}$ b) $\dfrac{2^{2n}\cdot 2^{n+2}\cdot 2^{2n+1}}{2^2\cdot 2^3}$ c) $\dfrac{(-2)^{n-1}\cdot(-2)^{3n+2}(-3)^{2n-1}}{-2}$

Nyní si jednotlivé příklady rozebereme a ukážeme si, že k jejich vypočtení stačí pouze tři zásady:

- n (proměnná) je také číslo (i když nevíme jaké) $\Rightarrow$ chováme se k němu jako k obyčejnému číslu,
- vzorce pro mocniny platí, i když je v nich proměnná,
- význam mocniny $2^{n-1}=\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{n-1\,\text{krát}}$.

A teď se vrátíme k příkladům.

Př. 2: Spočti $2^{n+2}\cdot 2^{2n-3}$.

$2^{n+2}\cdot 2^{2n-3}$
Představíme si, že n je normální číslo $\Rightarrow$ $2^{5+2}\cdot 2^{2\cdot 5-3}=2^7\cdot 2^7=2^{7+7}=2^{14}$,

$\Rightarrow$ použijeme pravidlo: $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$.
$2^{n+2} \cdot 2^{2n-3} = 2^{(n+2)+(2n-3)} = 2^{3n-1}$

Př. 3: Spočti $\dfrac{2^{2n} \cdot 2^{n+2} \cdot 2^{2n+1}}{2^2 \cdot 2^3}$.

$$\frac{2^{2n} \cdot 2^{n+2} \cdot 2^{2n+1}}{2^2 \cdot 2^3} = \frac{2^{2n+n+2+2n+1}}{2^{2+3}} = \frac{2^{5n+3}}{2^5} =$$

Představíme si, že n je normální číslo $\Rightarrow \dfrac{2^{5\cdot 7+3}}{2^5} = 2^{5\cdot 7+3-5} = 2^{33}$,

$\Rightarrow$ použijeme pravidlo: $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$.

$$\frac{2^{5n+3}}{2^5} = 2^{5n+3-5} = 2^{5n-2}$$

Př. 4: Zdůvodni, proč je špatný následující postup: $(-2)^{4n+1}(-3)^{2n-1} = 6^{6n}$.

Postup budí dojem, že se odvolává na pravidlo $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$, toto pravidlo však nemůžeme použít, protože základy mocnin nejsou stejné (a není stejný ani základ výsledné mocniny).
Podrobnější postup:
rozepíšeme mocniny: $(-2)^{4n+1}(-3)^{2n-1} = \underbrace{(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot(-2)}_{4n+1\,\text{krát}}\cdot\underbrace{(-3)\cdot(-3)\cdot\ldots\cdot(-3)}_{2n-1\,\text{krát}} =$

$\Rightarrow$ je vidět, že nemáme stejný počet –2 a –3 $\Rightarrow$ není možné sestavit ze všech 6.

Př. 5: Zdůvodni, proč je špatný následující postup: $\dfrac{(-2)^{4n+1}}{-2} = 1^{4n+1}$.

Postup budí dojem, že došlo k vykrácení čísla (-2) ze součinu s číslem $(4n-1)$, jenže žádný takový součin v čitateli není.

Rozepíšeme čitatel zlomku: $\dfrac{(-2)^{4n+1}}{-2} = \dfrac{\overbrace{(-2)\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot(-2)}^{4n+1\,\text{krát}}}{-2}$ - teď je vidět, že (-2) ve jmenovateli zkrátí nahoře pouze jednu (-2) $\Rightarrow$ v čitateli zbylo $4n$ členů $\Rightarrow$ platí

$$\frac{(-2)^{4n+1}}{-2} = \frac{\overbrace{(-2)\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot(-2)}^{4n+1\,\text{krát}}}{-2} = (-2)^{4n} = 2^{4n}.$$

Stejný výsledek jsme mohli podstatně jednodušeji získat pomocí vzorce $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$.

$$\frac{(-2)^{4n+1}}{-2} = \frac{(-2)^{4n+1}}{(-2)^1} = (-2)^{4n+1-1} = (-2)^{4n}$$

Př. 6: Spočti $\frac{(-2)^{n-1}\cdot(-2)^{3n+2}(-3)^{2n-1}}{-2}$.

$$\frac{(-2)^{n-1}\cdot(-2)^{3n+2}(-3)^{2n-1}}{-2}=\frac{(-2)^{4n+1}(-3)^{2n-1}}{(-2)^{1}}=(-2)^{4n}(-3)^{2n-1}=-2^{4n}\cdot 3^{2n-1}$$

Platí: $(-2)^{4n}=2^{4n}$ (sudý mocnitel)

$(-3)^{2n-1}=-3^{2n-1}$ (lichý mocnitel)

Př. 7: Rozhodni, které mocniny jsou kladné a které záporné.

a) 2^{-n-1} b) $(-3)^{2n-3}$ c) $(-2)^{4n+1}$ d) $(-5)^{n+1}$ e) $(-7)^{-2n+4}$ f) $(-1)^{8n+2}$

a) $2^{-n-1}>0$: umocňujeme kladné číslo, na exponentu nezáleží.

b) $(-3)^{2n-3}<0$: umocňujeme záporné číslo, na lichý exponent.

c) $(-2)^{4n+1}<0$: umocňujeme záporné číslo, na lichý exponent.

d) $(-5)^{n+1}$: nemůžeme rozhodnout, nevíme, zda číslo $n+1$ je sudé nebo liché.

e) $(-7)^{-2n+4}>0$: umocňujeme záporné číslo, na sudý exponent.

f) $(-1)^{8n+2}>0$: umocňujeme záporné číslo, na sudý exponent.

Př. 8: Zapiš jako jednu mocninu.

a) $\frac{(-2)^{2n-1}\cdot 4^{n+3}}{(-2)^{2-2n}}=$ b) $\left(-2^{3}\right)^{2}\cdot 2^{n+1}:4^{n}=$ c) $(-2)^{n}\cdot 4^{n}\cdot 2^{2n+4}=$

a) $\frac{(-2)^{2n-1}\cdot 4^{n+3}}{(-2)^{2-2n}}=\frac{-2^{2n-1}\cdot\left(2^{2}\right)^{n+3}}{2^{2-2n}}=-\frac{2^{2n-1}\cdot 2^{2n+6}}{2^{2-2n}}=-\frac{2^{4n+5}}{2^{2-2n}}=-2^{4n+5-(2-2n)}=-2^{6n+3}$

b) $\left(-2^{3}\right)^{2}\cdot 2^{n+1}:4^{n}=2^{6}\cdot 2^{n+1}:\left(2^{2}\right)^{n}=2^{n+7}:2^{2n}=2^{n+7-2n}=2^{7-n}$

c) $(-2)^{n}\cdot 4^{n}\cdot 2^{2n+4}=$

Problém: Nevíme zda *n* je liché nebo sudé číslo $\Rightarrow$ nemůžeme přepsat $(-2)^{n}$ jako mocninu 2 $\Rightarrow$ zkusíme přepsat ostatní členy jako mocniny (-2).

$(-2)^{n}\cdot 4^{n}\cdot 2^{2n+4}=(-2)^{n}\cdot\left(2^{2}\right)^{n}\cdot 2^{2n+4}=(-2)^{n}\cdot 2^{2n}\cdot 2^{2n+4}=(-2)^{n}\cdot 2^{4n+4}=(-2)^{n}\cdot(-2)^{4n+4}=$

$=(-2)^{5n+4}$

Př. 9: Uprav výraz tak, aby se ve výsledku vyskytovala pouze jediná mocnina s proměnnou v exponentu.

a) $2^{n+1}\cdot 3^{n}$ b) $2^{n}\cdot 4^{n+1}$ c) $2^{n+1}\cdot 3^{n-1}$

a) $2^{n+1}\cdot 3^{n}$

Součin $2\cdot 3=6$ $\Rightarrow$ musíme zajistit, aby v součinu bylo 2 a 3 stejně.

$2^{n+1}\cdot 3^n = 2\cdot 2^n\cdot 3^n = 2\cdot\left(2^n\cdot 3^n\right) = 2\cdot 6^n$

b) $2^n\cdot 4^{n+1}$

$2^n\cdot 4^{n+1} = 2^n\cdot 4^n\cdot 4 = \left(2^n\cdot 4^n\right)\cdot 4 = 4\cdot 8^n$

c) $2^{n+1}\cdot 3^{n-1}$

$2^{n+1}\cdot 3^{n-1} = 2^2\cdot 2^{n-1}\cdot 3^{n-1} = 2^2\cdot\left(2^{n-1}\cdot 3^{n-1}\right) = 4\cdot 6^{n-1}$

Př. 10: Vyjádři pomocí mocnin prvočísel bez zlomků. Dodržuj KISS.

$$\left(\frac{6^{n+1}\cdot 15^2\cdot 9^{-2n}}{25^3\cdot 12^n\cdot 4^{2n+3}}\right)^{-2} : \left(\frac{16^n\cdot 3^{2n-1}\cdot 5^{2-n}}{20^3\cdot 15^{-3+n}\cdot 12^{-3}}\right)^3$$

$$\left(\frac{6^{n+1}\cdot 15^2\cdot 9^{-2n}}{25^3\cdot 12^n\cdot 4^{2n+3}}\right)^{-2} : \left(\frac{16^n\cdot 3^{2n-1}\cdot 5^{2-n}}{20^3\cdot 15^{-3+n}\cdot 12^{-3}}\right)^3 =$$

(složená čísla rozložíme na prvočísla)

$$\left(\frac{[2\cdot 3]^{n+1}\cdot[3\cdot 5]^2\cdot\left[3^2\right]^{-2n}}{\left[5^2\right]^3\cdot\left[2^2\cdot 3\right]^n\cdot\left[2^2\right]^{2n+3}}\right)^{-2} : \left(\frac{\left[2^4\right]^n\cdot 3^{2n-1}\cdot 5^{2-n}}{\left[2^2\cdot 5\right]^3\cdot[3\cdot 5]^{-3+n}\cdot\left[2^2\cdot 3\right]^{-3}}\right)^3 =$$

(odstraníme vnitřní hranaté závorky)

$$\left(\frac{2^{n+1}\cdot 3^{n+1}\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 3^{-4n}}{5^6\cdot 2^{2n}\cdot 3^n\cdot 2^{4n+6}}\right)^{-2} : \left(\frac{2^{4n}\cdot 3^{2n-1}\cdot 5^{2-n}}{2^6\cdot 5^3\cdot 3^{-3+n}\cdot 5^{-3+n}\cdot 2^{-6}\cdot 3^{-3}}\right)^3 =$$

(vypočítáme vnitřky obou zlomků, vyřešíme dělení)

$$\left(2^{n+1-2n-(4n+6)}\cdot 3^{n+1+2-4n-n}\cdot 5^{2-6}\right)^{-2}\cdot\left(2^{4n-6-(-6)}\cdot 3^{2n-1-(-3+n)-(-3)}\cdot 5^{2-n-3-(-3+n)}\right)^{-3} =$$

$$\left(2^{-5n-5}\cdot 3^{-4n+3}\cdot 5^{-4}\right)^{-2}\cdot\left(2^{4n}\cdot 3^{n+5}\cdot 5^{2-2n}\right)^{-3} =$$

(odstraníme závorky)

$$2^{10n+10}\cdot 3^{8n-6}\cdot 5^8\cdot 2^{-12n}\cdot 3^{-3n-15}\cdot 5^{-6+6n} =$$

(spočítáme obě části dohromady)

$$2^{10n+10-12n}\cdot 3^{8n-6-3n-15}\cdot 5^{8-6+6n} = 2^{10-2n}\cdot 3^{5n-21}\cdot 5^{6n+2}$$

Pedagogická poznámka: Následující příklad je pouze pro nejrychlejší žáky, nesnažím se ho ukazovat celé třídě.

Př. 11: Zjednoduš výrazy: a) $\frac{a^{n+1}-a^n}{a^{n+1}+a^n} =$ b) $\frac{n^{a+2}+n^{a+1}}{n^{a+1}-2n^a}$.

a) $\frac{a^{n+1}-a^n}{a^{n+1}+a^n} = \frac{a\cdot a^n-a^n}{a\cdot a^n+a^n} = \frac{a^n\left(a-1\right)}{a^n\left(a+1\right)} = \frac{a-1}{a+1}$

b) $\frac{n^{a+2}+n^{a+1}}{n^{a+1}-2n^a} = \frac{n\cdot n^{a+1}+n^{a+1}}{n\cdot n^a-2n^a} = \frac{n^{a+1}\left(n+1\right)}{n^a\left(n-2\right)} = n\frac{n+1}{n-2}$

Př. 12: Sbírka příklad 11

Př. 13: Petáková:
strana 62/cvičení 37 c) e)
strana 62/cvičení 38 b) f)
strana 62/cvičení 44 b) c)
strana 62/cvičení 45 a) c)

Shrnutí: Protože vzorce pro mocniny platí pro všechny celé mocnitele, můžeme s celočíselnou proměnnou v mocniteli počítat úplně stejně jako s běžnými čísly.