1.6.6 Mocniny s celým mocnitelem II

Předpoklady: 010605

Pedagogická poznámka: Je třeba zkontrolovat souhrn z minulé hodiny. První příklad je dobré namátkou vybrat a oznámkovat. Je třeba takto připomenout látku z minulé hodiny, aby žáci ve složitějších příkladech mocniny opravdu využívali.

Př. 1: Zapiš bez zlomku jako mocninu čísla a.

a) $\frac{a^2}{a^{-2}}\cdot\left(\frac{1}{a^2}\right)^{-3}a^{-2}$ b) $\frac{1}{a^{-3}}\cdot\frac{1}{a^3}\cdot\frac{1}{a^{-1}}$

a) $\frac{a^2}{a^{-2}}\cdot\left(\frac{1}{a^2}\right)^{-3}a^{-2}=a^{2-(-2)}\cdot\frac{1}{a^{-6}}a^{-2}=a^{4-(-6)-2}=a^8$

b) $\frac{1}{a^{-3}}\cdot\frac{1}{a^3}\cdot\frac{1}{a^{-1}}=\frac{1}{a^{-3+3-1}}=\frac{1}{a^{-1}}=a$

Počítání se zlomky

Př. 2: Uprav zlomek $\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}$ tak, abys odstranil zápornou mocninu. Najdi co nejvíce způsobů, jak úpravu provést.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}=\frac{3^{-4}}{4^{-4}}=3^{-4}\cdot\frac{1}{4^{-4}}=\frac{1}{3^4}\cdot\frac{1}{\frac{1}{4^4}}=\frac{4^4}{3^4}$$

Jinak $\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}=\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^4}=\frac{1}{\frac{3^4}{4^4}}=1:\frac{3^4}{4^4}=1\cdot\frac{4^4}{3^4}=\frac{4^4}{3^4}$.

Ještě jinak $\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}=\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}\right)^4=\left(\frac{1}{\frac{3}{4}}\right)^4=\left(\frac{4}{3}\right)^4=\frac{4^4}{3^4}$.

$\Rightarrow$ Všechny výsledky stejné.

Pedagogická poznámka: Při kontrole na tabuli je nutné ukázat všechny tři postupy, aby bylo vidět, že různými správnými cestami se musíme dostat ke stejnému správnému výsledku.

Př. 3: Zformuluj pravidlo pro odstranění záporné mocniny ze zlomku $\left(\frac{a}{b}\right)^{-z}$.

Pro každá dvě reálná čísla a, b, $a \neq 0, b \neq 0$ a pro každé celé číslo z platí:
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-z} = \left(\frac{b}{a}\right)^{z}$

Pedagogická poznámka: V tomto okamžiku se již snažíme řešit i předpoklady.

Př. 4: Uprav zlomky, tak abys odstranil zápornou mocninu.
a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}\left(\frac{3}{2}\right)^{2}$

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{1}\right)^{2} = 4$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2} = \frac{9}{4}$

c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}\left(\frac{3}{2}\right)^{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3}\frac{3^2}{2^2} = \frac{2^3}{3^3}\frac{3^2}{2^2} = \frac{2}{3}$

Př. 5: Najdi alespoň jeden způsob, jak převést dělení výrazem $\left(\frac{a}{b}\right)^{z}$ na násobení.

Zkoušíme:
$1:\left(\frac{a}{b}\right)^{z} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{z}} = 1\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{-z} = 1\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{z}$

Pro každá dvě reálná čísla a, b, $a \neq 0, b \neq 0$ a pro každé celé číslo z platí:
$1:\left(\frac{a}{b}\right)^{z} = 1\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{z} = 1\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{-z}$

Stejné pravidlo jsme používali pro dělení zlomků: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$.

Př. 6: Vypočti.
a) $\frac{a^2}{b^{-3}}:\frac{b^2}{a^3}$ b) $\left(ab^2\right)^3:\left(\frac{a^2}{b}\right)^2$ c) $\left(a^2b^{-2}\right)^{-2}:\left(\frac{a^3}{b^{-2}}\right)^{-3}$

a) $\frac{a^2}{b^{-3}}:\frac{b^2}{a^3} = \frac{a^2}{b^{-3}}\cdot\frac{a^3}{b^2} = \frac{a^5}{b^{-1}} = a^5b$ b)
$\left(ab^2\right)^3:\left(\frac{a^2}{b}\right)^2 = a^3b^6\cdot\left(\frac{b}{a^2}\right)^2 = a^3b^6\cdot\frac{b^2}{a^4} = a^{-1}b^8$

c) $\left(a^2b^{-2}\right)^{-2}:\left(\frac{a^3}{b^{-2}}\right)^{-3}=a^{-4}b^4\cdot\left(\frac{a^3}{b^{-2}}\right)^3=a^{-4}b^4\cdot\frac{a^9}{b^{-6}}=a^5b^{10}$

Př. 7: Při jakých úpravách se převrací zlomek $\left(\frac{a}{b}\right)$ na $\left(\frac{b}{a}\right)$?

Zlomek $\left(\frac{a}{b}\right)$ se převrací na $\left(\frac{b}{a}\right)$, když:

- měníme znaménko mocniny: $\left(\frac{a}{b}\right)^z=\left(\frac{b}{a}\right)^{-z}$,
- měníme dělení na násobení: $1:\left(\frac{a}{b}\right)^z=1\cdot\left(\frac{b}{a}\right)$

Skutečnost, že změna dělení na násobení má pro zlomek stejný důsledek jako změna znaménka mocniny není překvapivá. Například změnou znaménka exponentu z kladného na záporné přesunujeme součin základů z čitatele do jmenovatele a tedy převádíme násobení na dělení.

Př. 8: Doplň do výrazů vnitřky zlomků (případně exponent).

a) $\left(\frac{a}{b}\right)^2:\left(\frac{c}{d}\right)^{-3}=\left(\frac{a}{b}\right)^2:\left(-\right)^3$ b) $\left(\frac{a}{b}\right)^2:\left(\frac{c}{d}\right)^{-3}=\left(\frac{a}{b}\right)^2\cdot\left(-\right)^3$

c) $\left(\frac{a}{b}\right)^2:\left(\frac{c}{d}\right)^{-3}=\left(\frac{a}{b}\right)^2\cdot\left(-\right)^{-3}$ d) $\left(\frac{a}{b}\right)^2:\left(\frac{c}{d}\right)^{-3}=\left(-\right)^{-2}\cdot\left(\frac{d}{c}\right)$

a) $\left(\frac{a}{b}\right)^2:\left(\frac{c}{d}\right)^{-3}=\left(\frac{a}{b}\right)^2:\left(\frac{d}{c}\right)^3$ b) $\left(\frac{a}{b}\right)^2:\left(\frac{c}{d}\right)^{-3}=\left(\frac{a}{b}\right)^2\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^3$

c) $\left(\frac{a}{b}\right)^2:\left(\frac{c}{d}\right)^{-3}=\left(\frac{a}{b}\right)^2\cdot\left(\frac{d}{c}\right)^{-3}$ d) $\left(\frac{a}{b}\right)^2:\left(\frac{c}{d}\right)^{-3}=\left(\frac{b}{a}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{d}{c}\right)^{-3}$

Pedagogická poznámka: Zbytek hodiny tvoří samostatné počítání studentů, kontrolu provádíme tak, aby si všichni stihli spočítat alespoň příklady 5. –7. Ti rychlejší stihnou všechno a dopočítají se až k příkladům se sbírky.
Je potřeba, aby studenti nejen nedělali chyby, ale alespoň příklady, které počítají ve škole, řešili rozumných způsobem (podle zásad KISS, bez obcházení záporných mocnin atd.).

Př. 9: Uprav výrazy a výsledek vyjádři bez použití zlomků.

a) $\frac{a^2b}{c^3}:\frac{ab^2}{c^2}=$ b) $\frac{a^2}{c^{-3}}:\left(\frac{a}{c^2}\right)^{-2}=$ c) $\frac{a^{-3}b^2}{c^{-3}}:\left(\frac{b^3c}{a^2}\right)^2=$

a) $\frac{a^2b}{c^3}:\frac{ab^2}{c^2}=\frac{a^2b}{c^3}\cdot\frac{c^2}{ab^2}=a^{2-1}\cdot b^{1-2}\cdot c^{2-3}=a\cdot b^{-1}\cdot c^{-1}$

b) $\frac{a^2}{c^{-3}}:\left(\frac{a}{c^2}\right)^{-2}=\frac{a^2}{c^{-3}}\cdot\left(\frac{a}{c^2}\right)^{2}=\frac{a^2}{c^{-3}}\cdot\frac{a^2}{c^4}=\frac{a^{2+2}}{c^{-3+4}}=\frac{a^4}{c}=a^4\cdot c^{-1}$

c) $\frac{a^{-3}b^2}{c^{-3}}:\left(\frac{b^3c}{a^2}\right)^{2}=\frac{a^{-3}b^2}{c^{-3}}\cdot\left(\frac{a^2}{b^3c}\right)^{2}=\frac{a^{-3}b^2}{c^{-3}}\cdot\frac{a^4}{b^6c^2}=\frac{a^{-3+4}b^{2-6}}{c^{-3+2}}=\frac{ab^{-4}}{c^{-1}}=acb^{-4}$

Př. 10: Sbírka příklad 8 f) g) h) i) j) k) l)

Př. 11: Petáková:
strana 62/cvičení 43 a) b) c) d) e) f)

Shrnutí: Pro zlomek se zápornou mocninou platí $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}=\left(\frac{b}{a}\right)^{m}$. Při dělení zlomky platí:

$:\left(\frac{a}{b}\right)^{z}=\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{-z}=\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{z}$.