

1.6.7 Mocniny s celým mocnitelem II

Předpoklady: 010606

Pedagogická poznámka: Je třeba zkontrolovat souhrn z minulé hodiny. První příklad je dobré namátkou vybrat a oznámkovat. Je třeba takto připomenout látku z minulé hodiny, aby žáci ve složitějších příkladech mocniny opravdu využívali.

Př. 1: Zapiš bez zlomku jako mocninu čísla a .

$$\text{a) } \frac{a^2}{a^{-2}} \cdot \left(\frac{1}{a^2}\right)^{-3} a^{-2} \qquad \text{b) } \frac{1}{a^{-3}} \cdot \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^{-1}}$$

$$\text{a) } \frac{a^2}{a^{-2}} \cdot \left(\frac{1}{a^2}\right)^{-3} a^{-2} = a^{2-(-2)} \cdot \frac{1}{a^{-6}} a^{-2} = a^{4-(-6)-2} = a^8$$

$$\text{b) } \frac{1}{a^{-3}} \cdot \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^{-1}} = \frac{1}{a^{-3+3-1}} = \frac{1}{a^{-1}} = a$$

Počítání se zlomky

Př. 2: Uprav zlomek $\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}$ tak, abys odstranil zápornou mocninu. Najdi co nejvíce způsobů, jak úpravu provést.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-4} = \frac{3^{-4}}{4^{-4}} = 3^{-4} \cdot \frac{1}{4^{-4}} = \frac{1}{3^4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{4^4}} = \frac{4^4}{3^4}$$

$$\text{Jinak } \left(\frac{3}{4}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^4} = \frac{1}{\frac{3^4}{4^4}} = 1 : \frac{3^4}{4^4} = 1 \cdot \frac{4^4}{3^4} = \frac{4^4}{3^4}.$$

$$\text{Ještě jinak } \left(\frac{3}{4}\right)^{-4} = \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}\right)^4 = \left(\frac{1}{\frac{3}{4}}\right)^4 = \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{4^4}{3^4}.$$

\Rightarrow Všechny výsledky stejné.

Pedagogická poznámka: Při kontrole na tabuli je nutné ukázat všechny tři postupy, aby bylo vidět, že různými správnými cestami se musíme dostat ke stejnému správnému výsledku.

Př. 3: Zformuluj pravidlo pro odstranění záporné mocniny ze zlomku $\left(\frac{a}{b}\right)^{-z}$.

Pro každá dvě reálná čísla $a, b, a \neq 0, b \neq 0$ a pro každé celé číslo z platí:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-z} = \left(\frac{b}{a}\right)^z$$

Pedagogická poznámka: V tomto okamžiku se již snažíme řešit i předpoklady.

Př. 4: Uprav zlomky, tak abys odstranil zápornou mocninu.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} \left(\frac{3}{2}\right)^2$

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{3^2}{2^2} = \frac{2^3 3^2}{3^3 2^2} = \frac{2}{3}$

Př. 5: Najdi alespoň jeden způsob, jak převést dělení výrazem $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ na násobení.

Zkoušíme:

$$1: \left(\frac{a}{b}\right)^z = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^z} = 1 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-z} = 1 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^z$$

Pro každá dvě reálná čísla $a, b, a \neq 0, b \neq 0$ a pro každé celé číslo z platí:

$$1: \left(\frac{a}{b}\right)^z = 1 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^z = 1 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-z}$$

Stejné pravidlo jsme používali pro dělení zlomků: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.

Př. 6: Vypočti.

a) $\frac{a^2}{b^{-3}} : \frac{b^2}{a^3}$ b) $(ab^2)^3 : \left(\frac{a^2}{b}\right)^2$ c) $(a^2b^{-2})^{-2} : \left(\frac{a^3}{b^{-2}}\right)^{-3}$

a) $\frac{a^2}{b^{-3}} : \frac{b^2}{a^3} = \frac{a^2}{b^{-3}} \cdot \frac{a^3}{b^2} = \frac{a^5}{b^{-1}} = a^5 b$ b)

$(ab^2)^3 : \left(\frac{a^2}{b}\right)^2 = a^3 b^6 \cdot \left(\frac{b}{a^2}\right)^2 = a^3 b^6 \cdot \frac{b^2}{a^4} = a^{-1} b^8$

$$c) (a^2b^{-2})^{-2} : \left(\frac{a^3}{b^{-2}}\right)^{-3} = a^{-4}b^4 \cdot \left(\frac{a^3}{b^{-2}}\right)^3 = a^{-4}b^4 \cdot \frac{a^9}{b^{-6}} = a^5b^{10}$$

Př. 7: Při jakých úpravách se převrací zlomek $\left(\frac{a}{b}\right)$ na $\left(\frac{b}{a}\right)$?

Zlomek $\left(\frac{a}{b}\right)$ se převrací na $\left(\frac{b}{a}\right)$, když:

- měníme znaménko mocniny: $\left(\frac{a}{b}\right)^z = \left(\frac{b}{a}\right)^{-z}$,
- měníme dělení na násobení: $1 : \left(\frac{a}{b}\right)^z = 1 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^z$

Skutečnost, že změna dělení na násobení má pro zlomek stejný důsledek jako změna znaménka mocniny není překvapivá. Například změnou znaménka exponentu z kladného na záporné přesunujeme součin základů z čitatele do jmenovatele a tedy převádíme násobení na dělení.

Př. 8: Doplně do výrazů vnitřky zlomků (případně exponent).

$$a) \left(\frac{a}{b}\right)^2 : \left(\frac{c}{d}\right)^{-3} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 : (-)^3 \qquad b) \left(\frac{a}{b}\right)^2 : \left(\frac{c}{d}\right)^{-3} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot (-)^3$$

$$c) \left(\frac{a}{b}\right)^2 : \left(\frac{c}{d}\right)^{-3} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot (-)^{-3} \qquad d) \left(\frac{a}{b}\right)^2 : \left(\frac{c}{d}\right)^{-3} = (-)^{-2} \cdot \left(\frac{d}{c}\right)^3$$

$$a) \left(\frac{a}{b}\right)^2 : \left(\frac{c}{d}\right)^{-3} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 : \left(\frac{d}{c}\right)^3 \qquad b) \left(\frac{a}{b}\right)^2 : \left(\frac{c}{d}\right)^{-3} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^3$$

$$c) \left(\frac{a}{b}\right)^2 : \left(\frac{c}{d}\right)^{-3} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{d}{c}\right)^{-3} \qquad d) \left(\frac{a}{b}\right)^2 : \left(\frac{c}{d}\right)^{-3} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{d}{c}\right)^{-3}$$

Pedagogická poznámka: Zbytek hodiny tvoří samostatné počítání studentů, kontrolu provádíme tak, aby si všichni stihli spočítat alespoň příklady 5. –7. Ti rychlejší stihnou všechno a dopočítají se až k příkladům se sbírky. Je potřeba, aby studenti nejen nedělali chyby, ale alespoň příklady, které počítají ve škole, řešili rozumných způsobem (podle zásad KISS, bez obcházení záporných mocnin atd.).

Př. 9: Uprav výrazy a výsledek vyjádři bez použití zlomků.

$$a) \frac{a^2b}{c^3} : \frac{ab^2}{c^2} = \qquad b) \frac{a^2}{c^{-3}} : \left(\frac{a}{c^2}\right)^{-2} = \qquad c) \frac{a^{-3}b^2}{c^{-3}} : \left(\frac{b^3c}{a^2}\right)^2 =$$

$$a) \frac{a^2b}{c^3} : \frac{ab^2}{c^2} = \frac{a^2b}{c^3} \cdot \frac{c^2}{ab^2} = a^{2-1} \cdot b^{1-2} \cdot c^{2-3} = a \cdot b^{-1} \cdot c^{-1}$$

$$\text{b) } \frac{a^2}{c^{-3}} : \left(\frac{a}{c^2}\right)^{-2} = \frac{a^2}{c^{-3}} \cdot \left(\frac{a}{c^2}\right)^2 = \frac{a^2}{c^{-3}} \cdot \frac{a^2}{c^4} = \frac{a^{2+2}}{c^{-3+4}} = \frac{a^4}{c} = a^4 \cdot c^{-1}$$

$$\text{c) } \frac{a^{-3}b^2}{c^{-3}} : \left(\frac{b^3c}{a^2}\right)^2 = \frac{a^{-3}b^2}{c^{-3}} \cdot \left(\frac{a^2}{b^3c}\right)^2 = \frac{a^{-3}b^2}{c^{-3}} \cdot \frac{a^4}{b^6c^2} = \frac{a^{-3+4}b^{2-6}}{c^{-3+2}} = \frac{ab^{-4}}{c^{-1}} = acb^{-4}$$

Př. 10: Sbírka příklad 8 f) g) h) i) j) k) l)

Př. 11: Petáková:

strana 62/cvičení 43 a) b) c) d) e) f)

Shrnutí: Pro zlomek se zápornou mocninou platí $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$. Při dělení zlomky platí:

$$: \left(\frac{a}{b}\right)^z = \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-z} = \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^z.$$