

## 1.6.10 Mocniny - shrnutí

**Předpoklady:** 010609

### Důležité znalosti

- $a^3 = a \cdot a \cdot a$ .
- $a^{-3} = \frac{1}{a \cdot a \cdot a}$ .
- vzorce pro násobení a dělení:  $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ ,  $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ .
- vzorec pro mocninu mocniny:  $(a^r)^s = a^{rs}$ .
- vzorce pro odstranění závorek:  $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$ ,  $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$ .
- $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 2^2$ ,  $-2^2 = -(2^2) = -4$ .
- Sudý mocnitel  $\Rightarrow$  nezáporný výsledek.
- Neznámá v mocniteli nic nemění na způsobu, kterým upravujeme.

### Zádrhele

- Nesmíme používat vzorce pro různé základy.
- Mocnina (stejně jako odmocnina) nemůže trhat závorky  $s + a - (a + b)^r \neq a^r + b^r$
- $x : \left(\frac{a}{b}\right)^{-3} = x \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{-3} = x \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^3 = x : \left(\frac{b}{a}\right)^3$  - nedělat dvě věci najednou
- Mínus v exponentu neovlivňuje znaménko (jen říká, že dělím místo násobení)

### Dobré rady

- Všechny vzorce se dají snadno odvodit z významu mocniny.
- Při nejasnostech se dá rozhodnout podle významu mocniny.
- Dodržovat KISS (zjednodušovat závorky před umocněním, ...)

**Př. 1:** Vypočti.

a)  $(-1)^{123}$

b)  $0^{52525252}$

c)  $2^2 \cdot 2^6$

d)  $\frac{3^{2k-3}}{3^{2-k}}$

a)  $(-1)^{123} = -1$

b)  $0^{52525252} = 0$

c)  $2^2 \cdot 2^6 = 2^{2+6} = 2^8$

d)  $\frac{3^{2k-3}}{3^{2-k}} = 3^{2k-3-(2-k)} = 3^{3k-5}$

**Př. 2:** Zjednoduš.

$$\text{a) } \left(\frac{a^2 \cdot b}{c^{-3}}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^{-2}}{b^3 c^{-3}}\right)^3 \qquad \text{b) } \frac{(4^2 \cdot 15^3)^{-2}}{12^3 \cdot 6^{-10}}$$

$$\text{a) } \left(\frac{a^2 \cdot b}{c^{-3}}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^{-2}}{b^3 c^{-3}}\right)^3 = \frac{a^4 \cdot b^2}{c^{-6}} \cdot \frac{a^{-6}}{b^9 c^{-9}} = \frac{a^{4-6} \cdot b^{2-9}}{c^{-6-9}} = a^{-2} \cdot b^{-7} \cdot c^{15}$$

$$\text{b) } \frac{(4^2 \cdot 15^3)^{-2}}{12^3 \cdot 6^{-10}} = \frac{4^{-4} \cdot 15^{-6}}{12^3 \cdot 6^{-10}} = \frac{(2^2)^{-4} \cdot (3 \cdot 5)^{-6}}{(2^2 \cdot 3)^3 \cdot (2 \cdot 3)^{-10}} = \frac{2^{-8} \cdot 3^{-6} \cdot 5^{-6}}{2^6 \cdot 3^3 \cdot 2^{-10} \cdot 3^{-10}} =$$

$$= 2^{-8-6-(-10)} \cdot 3^{-6-3-(-10)} \cdot 5^{-6} = 2^{-4} \cdot 3^1 \cdot 5^{-6}$$

**Př. 3:** Napiš jako jednu mocninu.

$$\text{a) } \frac{2^{n-1} \cdot 2^{2n-2}}{2^{2-n}} \qquad \text{b) } \frac{(-2)^{2n+1}}{(-2)^{2n}} \cdot [(-2)^n]^2 : \frac{2^3}{2^{n+4}} \qquad \text{c) } \frac{2^{n+2} \cdot 4^{2n+3}}{8^{n-1}}$$

$$\text{a) } \frac{2^{n-1} \cdot 2^{2n-2}}{2^{2-n}} = 2^{n-1+2n-2-(2-n)} = 2^{4n-5}$$

$$\text{b) } \frac{(-2)^{2n+1}}{(-2)^{2n}} \cdot [(-2)^n]^2 : \frac{2^3}{2^{n+4}} = (-2)^{2n+1-2n} \cdot (-2)^{2n} : 2^{3-n-4} = (-2)^1 \cdot (-2)^{2n} : 2^{-n-1} =$$

$$= (-2)^{2n+1} : 2^{-n-1} = -2^{2n+1} : 2^{-n-1} = -2^{2n+1-(-n-1)} = -2^{3n+2}$$

$$\text{c) } \frac{2^{n+2} \cdot 4^{2n+3}}{8^{n-1}} = \frac{2^{n+2} \cdot (2^2)^{2n+3}}{(2^3)^{n-1}} = \frac{2^{n+2} \cdot 2^{4n+6}}{2^{3n-3}} = 2^{n+2+4n+6-(3n-3)} = 2^{2n+11}$$

**Př. 4:** Doplně vzorce a dokaž jejich platnost:

$$a^r \cdot a^s = \quad , \quad \frac{a^r}{a^s} = \quad , \quad (a^r)^s = \quad , \quad (a \cdot b)^r = \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^r = .$$

$$a^r \cdot a^s = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{r\text{-krát}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{s\text{-krát}} = a^{r+s}$$

(r+s)-krát ⇒ a<sup>r+s</sup>

$$\frac{a^r}{a^s} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}^{r\text{-krát}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{s\text{-krát}}} = \overbrace{a \cdot a \dots a}^{(r-s)\text{-krát}} = a^{r-s}$$

$$(a^r)^s = \underbrace{a^r \cdot a^r \cdot a^r \dots a^r}_{s\text{-krát}} = \underbrace{\overbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}^{r\text{-krát}} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}^{r\text{-krát}} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}^{r\text{-krát}}}_{(s \cdot r)\text{-krát}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{(s \cdot r)\text{-krát}} = a^{r \cdot s}$$

$$(a \cdot b)^r = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \dots (a \cdot b)}_{r\text{-krát}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{r\text{-krát}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \dots b}_{r\text{-krát}} = a^r \cdot b^r$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{r\text{-krát}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{r\text{-krát}}} = \frac{a^r}{b^r}$$

**Př. 5:** Zjednoduř. Výsledek vyjádři pomocí kladných mocnin.

$$\text{a) } \left(\frac{c^{-2} \cdot b^4}{a^{-3}}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{a^2}{b^{-4} c^{-3}}\right)^3 : \left(\frac{a^{-2} b^3}{b^{-1} c^4}\right)^{-2} \qquad \text{b) } \frac{(25 \cdot 8^2 \cdot 12^3)^2}{(15^3 \cdot 6^4 \cdot 4^6)} : \left(\frac{2^3 \cdot 10^4 \cdot 9^3}{12^{-2} \cdot 6^6 \cdot 25}\right)^{-2}$$

a)

$$\begin{aligned} \left(\frac{c^{-2} \cdot b^4}{a^{-3}}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{a^2}{b^{-4} c^{-3}}\right)^3 : \left(\frac{a^{-2} b^3}{b^{-1} c^4}\right)^{-2} &= \frac{c^6 \cdot b^{-12}}{a^9} \cdot \frac{a^6}{b^{-12} c^{-9}} \cdot \left(\frac{a^{-2} b^3}{b^{-1} c^4}\right)^2 = c^{6-(-9)} \cdot a^{6-9} b^{-12-(-12)} \cdot \frac{a^{-4} b^6}{b^{-2} c^8} = \\ &= c^{15} \cdot a^{-3} \cdot \frac{a^{-4} b^6}{b^{-2} c^8} = c^{15-8} \cdot a^{-3-4} \cdot b^{6-(-2)} = c^7 \cdot a^{-7} \cdot b^8 = b^8 \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^7 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{(25 \cdot 8^2 \cdot 12^3)^2}{(15^3 \cdot 6^4 \cdot 4^6)} : \left(\frac{2^3 \cdot 10^4 \cdot 9^3}{12^{-2} \cdot 6^6 \cdot 25}\right)^{-2} &= \frac{(5^2 \cdot [2^3]^2 \cdot [2^2 \cdot 3]^3)^2}{(5 \cdot 3)^3 \cdot (2 \cdot 3)^4 \cdot (2^2)^6} : \left(\frac{2^3 \cdot [2 \cdot 5]^4 \cdot [3^2]^3}{[2^2 \cdot 3]^{-2} \cdot [2 \cdot 3]^6 \cdot 5^2}\right)^{-2} = \\ &= \frac{(5^2 \cdot 2^6 \cdot 2^6 \cdot 3^3)^2}{5^3 \cdot 3^3 \cdot 2^4 \cdot 3^4 \cdot 2^{12}} : \left(\frac{2^3 \cdot 2^4 \cdot 5^4 \cdot 3^6}{2^{-4} \cdot 3^{-2} \cdot 2^6 \cdot 3^6 \cdot 5^2}\right)^{-2} = \frac{5^4 \cdot 2^{24} \cdot 3^6}{5^3 \cdot 3^7 \cdot 2^{16}} : (2^5 \cdot 5^2 \cdot 3^2)^{-2} = \\ &= 5 \cdot 2^8 \cdot 3^{-1} \cdot (2^5 \cdot 5^2 \cdot 3^2)^2 = 5 \cdot 2^8 \cdot 3^{-1} \cdot 2^{10} \cdot 5^4 \cdot 3^4 = 2^{28} \cdot 3^3 \cdot 5^5 \end{aligned}$$

**Př. 6:** Vyjádři jako mocniny prvočísel.  $\frac{(9^n \cdot 4^{2-n})^2}{(12^{3n+1} \cdot 6^{n-2})} : \left(\frac{2^3 \cdot 8^{2+n}}{12^{-2n} \cdot 6^{n+2}}\right)^3$

$$\begin{aligned} \frac{(9^n \cdot 4^{2-n})^2}{12^{3n+1} \cdot 6^{n-2}} : \left(\frac{2^3 \cdot 8^{2+n}}{12^{-2n} \cdot 6^{n+2}}\right)^3 &= \frac{([3^2]^n \cdot [2^2]^{2-n})^2}{(2^2 \cdot 3)^{3n+1} \cdot (2 \cdot 3)^{n-2}} : \left(\frac{2^3 \cdot [2^3]^{2+n}}{[2^2 \cdot 3]^{-2n} \cdot [2 \cdot 3]^{n+2}}\right)^3 = \\ &= \frac{(3^{2n} \cdot 2^{4-2n})^2}{2^{6n+2} \cdot 3^{3n+1} \cdot 2^{n-2} \cdot 3^{n-2}} : \left(\frac{2^3 \cdot 2^{3n+6}}{2^{-4n} \cdot 3^{-2n} \cdot 2^{n+2} \cdot 3^{n+2}}\right)^3 = \frac{3^{4n} \cdot 2^{8-4n}}{2^{7n} \cdot 3^{4n-1}} : \left(\frac{2^{3n+9}}{2^{-3n+2} \cdot 3^{-n+2}}\right)^3 = \\ &= 3 \cdot 2^{8-11n} \cdot (2^{6n+7} \cdot 3^{n-2})^{-3} = 3 \cdot 2^{8-11n} \cdot 2^{-18n-21} \cdot 3^{-3n+6} = 2^{-29n-13} \cdot 3^{-3n+7} \end{aligned}$$

**Shrnutí:**  $a^3 = a \cdot a \cdot a$  a  $a^{-3} = \frac{1}{a \cdot a \cdot a}$ , Z toho plyne všechno ostatní.