

1.7.1 Sbírka definiční obory

Předpoklady:

Do definičního oboru výrazu v matematice zahrnujeme všechna čísla, pro která dokážeme výraz vyčíslit (spočítat) \Rightarrow z definičního oboru vyloučíme všechna čísla, pro která nejsme schopni výraz spočítat.

Př. 1: Které matematické operace

- můžeme provést se všemi reálnými čísly,
- které operace, se všemi reálnými čísly provést nemůžeme?

a) můžeme provést se všemi reálnými čísly
sčítání, odčítání, násobení, umocňování

b) které operace, se všemi reálnými čísly provést nemůžeme?

Dělení (nelze dělit nulou), odmocňování (nemůžeme odmocňovat záporná čísla).

\Rightarrow

Při určování definičního oboru stačí postupovat ve dvou krocích:

- Najdeme potenciálně nebezpečné operace, které není možné provádět se všemi čísly,
- Zjistíme, pro které hodnoty neznámé by do nebezpečné operace vstupovala zakázaná hodnota.

Další rady:

Nerovnice nenásobte zápornými čísly.

Př. 2: Urči definiční obory výrazů. a) $\frac{2x+1}{x}$ b) $\frac{x}{x+2}$ c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$

a) $\frac{2x+1}{x}$

Nebezpečná operace dělení $\Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow D(v)_x = R - \{0\}$.

b) $\frac{x}{x+2}$

Nebezpečná operace dělení $\Rightarrow x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2 \Rightarrow D(v)_x = R - \{-2\}$.

c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$

Nebezpečná operace dělení, dokonce dvakrát

- $\frac{1}{x} \Rightarrow x \neq 0$
- $\frac{1}{x+1} \Rightarrow x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

$D(v)_x = R - \{-1; 0\}$.

Př. 3: Urči definiční obory výrazů. a) \sqrt{x} b) $\sqrt{x+2}$ c) $\sqrt{2x-3}$

a) \sqrt{x}

Nebezpečná operace odmocnina $\Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow D(v)_x = \langle 0; \infty \rangle$.

b) $\sqrt{x+2}$

Nebezpečná operace odmocnina $\Rightarrow x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow D(v)_x = \langle -2; \infty \rangle$.

c) $\sqrt{2x-3}$

Nebezpečná operace odmocnina $\Rightarrow 2x-3 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 3 \Rightarrow x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow D(v)_x = \langle \frac{3}{2}; \infty \rangle$.

Př. 4: Urči definiční obory výrazů. a) $\frac{\sqrt{x}}{x-2}$ b) $\sqrt{|x|}$ c) $\sqrt{\frac{2}{x-2}}$ d) $\frac{1}{x^2-1}$ e)

$\sqrt{x^2+3}$, f) $\frac{x+3}{|-x+2|}$, g) $\frac{2}{x^2+1}$, h) $\sqrt{2-x}$, i) $\sqrt{-1-2x}$

a) $\frac{\sqrt{x}}{x-2}$

Nebezpečná operace odmocnina $\Rightarrow x \geq 0$.

Nebezpečná operace dělení $\Rightarrow x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$.

$\Rightarrow D(v)_x = \langle 0; \infty \rangle - \{2\}$

b) $\sqrt{|x|}$

Nebezpečná operace odmocnina $\Rightarrow |x| \geq 0$, platí vždy $\Rightarrow D(v)_x = R$

c) $\sqrt{\frac{2}{x-2}}$

Nebezpečná operace odmocnina $\Rightarrow x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$.

Nebezpečná operace dělení $\Rightarrow x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$.

$\Rightarrow D(v)_x = (2; \infty)$

d) $\frac{1}{x^2-1}$

Nebezpečná operace dělení $\Rightarrow x^2-1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x^2 \neq \pm 1$.

$\Rightarrow D(v)_x = R - \{-1; 1\}$

e) $\sqrt{x^2+3}$

Nebezpečná operace odmocnina $\Rightarrow x^2+3 \geq 0$, platí vždy $\Rightarrow D(v)_x = R$.

$$f) \frac{x+3}{|-x+2|}$$

Nebezpečná operace dělení $\Rightarrow |-x+2| \neq 0 \Rightarrow -x+2 \neq 0 \Rightarrow 2 \neq x$.

$$\Rightarrow D(v)_x = R - \{2\}$$

$$g) \frac{2}{x^2+1}$$

Nebezpečná operace dělení $\Rightarrow x^2+1 \neq 0$, platí vždy $\Rightarrow D(v)_x = R$

$$h) \sqrt{2-x}$$

Nebezpečná operace odmocnina $\Rightarrow 2-x \geq 0 \quad 2 \geq x \Rightarrow D(v)_x = (-\infty; 2]$.

$$i) \sqrt{-1-2x}$$

Nebezpečná operace odmocnina $\Rightarrow -1-2x \geq 0 \quad -1 \geq 2x \Rightarrow -\frac{1}{2} \geq x \quad D(v)_x = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$.

Př. 5: Urči definiční obory výrazů.

$$a) \frac{\frac{2x-7}{5}}{x+3}$$

$$b) \frac{\frac{2x-5}{1}}{x+6}$$

$$c) \frac{1}{\frac{3x+1}{3x}}$$

$$d) \frac{\frac{2x}{x+1}}{\frac{x-2}{x+3}}$$

$$a) \frac{\frac{2x-7}{5}}{x+3}$$

Nebezpečná operace dělení $\Rightarrow x+3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3 \Rightarrow D(v)_x = R - \{-3\}$.

$$b) \frac{\frac{2x-5}{1}}{x+6}$$

Nebezpečná operace dělení:

- $2x-5 \neq 0 \Rightarrow 2x \neq 5 \Rightarrow x \neq \frac{5}{2}$,

- $x+6 \neq 0 \Rightarrow x \neq -6$,

$$\Rightarrow D(v)_x = R - \left\{-6; \frac{5}{2}\right\}$$

$$c) \frac{1}{\frac{3x+1}{3x}}$$

Nebezpečná operace dělení:

- $3x+1 \neq 0 \Rightarrow 3x \neq -1 \Rightarrow x \neq -\frac{1}{3}$,

- $3x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$,

$$\Rightarrow D(v)_x = R - \left\{ -\frac{1}{3}; 0 \right\}.$$

$$d) \frac{\frac{2x}{x+1}}{\frac{x-2}{x+3}}$$

Nebezpečná operace dělení:

- $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$,

- $x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$,

- $x+3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$,

$$\Rightarrow D(v)_x = R - \{-3; -1; -2\}.$$

Př. 6: Urči definiční obory výrazů.

a) $\frac{1}{\sqrt{|x+1|}}$

b) $\frac{1}{1-\sqrt{x}}$

c) $\frac{1}{3-|x|}$

d) $\sqrt{|x|-1}$

e) $\sqrt{2-|x|}$

f) $\sqrt{|x+2|-1}$

g) $\sqrt{3-|x+1|}$

h) $\sqrt{1+|x+1|}$

a) $\frac{1}{\sqrt{|x+1|}}$

Nebezpečná operace odmocnina $\Rightarrow |x+1| \geq 0$, platí vždy,

Nebezpečná operace dělení $\Rightarrow \sqrt{|x+1|} \neq 0 \Rightarrow |x+1| \neq 0 \Rightarrow x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$,

$$\Rightarrow D(v)_x = R - \{-1\}.$$

b) $\frac{1}{1-\sqrt{x}}$

Nebezpečná operace odmocnina $\Rightarrow x \geq 0$,

Nebezpečná operace dělení $\Rightarrow 1-\sqrt{x} \neq 0 \Rightarrow 1 \neq \sqrt{x} \Rightarrow x \neq 1$,

$$\Rightarrow D(v)_x = \langle 0; \infty \rangle - \{1\}.$$

c) $\frac{1}{3-|x|}$

Nebezpečná operace dělení $\Rightarrow 3-|x| \neq 0 \Rightarrow 3 \neq |x| \Rightarrow$ hledáme čísla, která jsou od nuly vzdálena o tři $\Rightarrow x \neq -3; 3$

$$\Rightarrow D(v)_x = R - \{-3; 3\}.$$

d) $\sqrt{|x|-1}$

Nebezpečná operace odmocnina $\Rightarrow |x|-1 \geq 0 \Rightarrow |x| \geq 1 \Rightarrow$ hledáme čísla, která jsou od nuly vzdálena o jedna nebo více $\Rightarrow x \in (-\infty; -1) \cup \langle 1; \infty$

$$\Rightarrow D(v)_x = (-\infty; -1) \cup (1; \infty).$$

$$e) \sqrt{2-|x|}$$

Nebezpečná operace odmocnina $\Rightarrow 2-|x| \geq 0 \Rightarrow 2 \geq |x| \Rightarrow$ hledáme čísla, která jsou od nuly vzdálena o dvě nebo méně $\Rightarrow x \in \langle -2; 2 \rangle$

$$\Rightarrow D(v)_x = \langle -2; 2 \rangle.$$

$$f) \sqrt{|x+2|-1}$$

Nebezpečná operace odmocnina $\Rightarrow |x+2|-1 \geq 0 \Rightarrow |x+2| \geq 1 \Rightarrow$ hledáme čísla, která jsou od -2 vzdálena o 1 nebo více $\Rightarrow x \in (-\infty; -3) \cup \langle -2; \infty \rangle$

$$\Rightarrow D(v)_x = (-\infty; -3) \cup \langle -1; \infty \rangle.$$

$$g) \sqrt{3-|x+1|}$$

Nebezpečná operace odmocnina $\Rightarrow 3-|x+1| \geq 0 \Rightarrow 3 \geq |x+1| \Rightarrow$ hledáme čísla, která jsou od -1 vzdálena o 3 nebo méně $\Rightarrow x \in \langle -4; 2 \rangle$

$$\Rightarrow D(v)_x = \langle -4; 2 \rangle.$$

$$h) \sqrt{1+|x+1|}$$

Nebezpečná operace odmocnina $\Rightarrow |x+1|+1 \geq 0 \Rightarrow |x+1| \geq -1$, platí vždy

$$\Rightarrow D(v)_x = R.$$

Př. 7: Urči definiční obory výrazů. Dosaz' a urči hodnotu výrazu.

$$a) \frac{\sqrt{x-1}}{(y-1)(y+2)}, x=2, y=2 \quad b) 1 + \frac{x}{\sqrt{x}}, x=1 \quad c) \frac{\sqrt{1-x}}{x(x^2+3)}, x=-3$$

$$d) \sqrt{\frac{x-2}{|x-2|}} + \sqrt{x}, x=3 \quad e) \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1} + \frac{1}{x^2-1}, x=0$$

$$a) \frac{\sqrt{x-1}}{(y-1)(y+2)}, x=2, y=2$$

Proměnná x : Nebezpečná operace odmocnina $\Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow D(v)_x = \langle 1; \infty \rangle$

Proměnná y : Nebezpečná operace dělení:

- $y-1 \neq 0 \Rightarrow y \neq 1$,
- $y+2 \neq 0 \Rightarrow y \neq -2$,

$$\Rightarrow D(v)_y = R - \{-2; 1\}.$$

$$\text{Dosazení: } \frac{\sqrt{x-1}}{(y-1)(y+2)} = \frac{\sqrt{2-1}}{(2-1)(2+2)} = \frac{1}{4}$$

$$b) 1 + \frac{x}{\sqrt{x}}, x=1$$

Nebezpečná operace odmocnina $\Rightarrow x \geq 0$,

Nebezpečná operace dělení $\Rightarrow \sqrt{x} \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$,

$$\Rightarrow D(v)_x = (0; \infty).$$

$$\text{Dosazení: } 1 + \frac{x}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{1}} = 1 + 1 = 2$$

$$\text{c) } \frac{\sqrt{1-x}}{x(x^2+3)}, x = -3$$

Nebezpečná operace odmocnina $\Rightarrow 1-x \geq 0 \Rightarrow 1 \geq x$,

Nebezpečná operace dělení \Rightarrow

- $x \Rightarrow x \neq 0$,
- $x^2 + 3 \neq 0$, platí vždy

$$\Rightarrow D(v)_x = (-\infty; 1) - \{0\}.$$

$$\frac{\sqrt{1-x}}{x(x^2+3)} = \frac{\sqrt{1-(-3)}}{(-3)((-3)^2+3)} = \frac{\sqrt{4}}{(-3)(9+3)} = -\frac{2}{3 \cdot 12} = -\frac{1}{18}$$

$$\text{d) } \sqrt{\frac{x-2}{|x-2|}} + \sqrt{x}, x = 3$$

Nebezpečná operace odmocnina \Rightarrow

- $\frac{x-2}{|x-2|} \geq 0$, jmenovatel je nezáporný \Rightarrow zajímá nás pouze čitatel $\Rightarrow x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$
- $x \geq 0$,

Nebezpečná operace dělení $\Rightarrow |x-2| \neq 0 \Rightarrow x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$,

$$\Rightarrow D(v)_x = (2; \infty).$$

$$\text{e) } \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1} + \frac{1}{x^2-1}, x = 0$$

Nebezpečná operace odmocnina \Rightarrow

- $1-x^2 \geq 0 \Rightarrow 1 \geq x^2$,
- $x^2-1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1$,

Nebezpečná operace dělení $\Rightarrow x^2-1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1$,

$$\Rightarrow D(v)_x = \emptyset \text{ (} x^2 \text{ nemůže být najednou různou, menší a větší než 1).}$$

Dosazení není možné.

Shrnutí: Pro určování definičního oboru nám stačí jediné pravidlo: vyloučíme všechna čísla, pro která nedokážeme výraz spočítat.