

1.8.1 Mnohočleny, sčítání a odčítání mnohočlenů

Předpoklady: 010702

Mnohočlen = zvláštní typ výrazů. \Rightarrow Jak ho poznáme?

Mnohočleny obsahují pouze přirozené mocniny neznámých (jedné nebo více) a konstanty.

Př. 1: Rozhodni, které z následujících výrazů jsou mnohočleny.

a) $x^2 y^2 - 2x^2 + 3y$

b) $x^2 - \frac{3}{4x} + 8$

c) $x^2 + 3y\sqrt{x} + y^2$

d) $x^2 - \frac{3}{4}x + \sqrt{3}$

a) $x^2 y^2 - 2x^2 + 3y$ - je mnohočlen dvou proměnných.

b) $x^2 - \frac{3}{4x} + 8$ - není mnohočlen (x je ve jmenovateli \Rightarrow záporná mocnina x).

c) $x^2 + 3y\sqrt{x} + y^2$ - není mnohočlen (obsahuje odmocninu z x).

d) $x^2 - \frac{3}{4}x + \sqrt{3}$ - je mnohočlen (obsahuje zlomek, ale bez neznámé ve jmenovateli,

podobně pod odmocninou není neznámá a jde tedy jen o konstantu).

I mnohočleny mají přesnou definici.

Pedagogická poznámka: Zadání následujícího příkladu žáci vidí tak maximálně minutu, předem říkám, že v něm musí najít pravidelnosti, podle kterých by pak dokázali přepsat definici z hlavy. Na tupé nabouchání do hlavy čas nestačí.

Př. 2: Přečti si definici mnohočlenu, tak abys ji byl schopen po schování textu napsat z paměti do sešitu.

“Mnohočlen (Polynom) s jednou proměnou je výraz, který se dá zapsat jako:

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$, kde $a_0; a_1; a_2; \dots; a_n$ jsou reálná čísla, n je celé nezáporné číslo a x je proměnná.“

Pravidelnosti a logické postřehy:

- Části (správně členy) mají tvar $a_n x^n$, číslo n u x je mocnina, u konstanty a jde o dolní index (rozlišující jednotlivá a od sebe),
- členy jsou stejné, pouze se zmenšuje číslo n na $n-1$, $n-2$, ... (postupně se zmenšují mocniny x),
- řada končí členy $a_1 x^1 + a_0$ (zřejmě se nepíše zbytečné $x^0 = 1$),
- x je proměnná (jako obvykle),
- n je celé nezáporné číslo (vystupuje jako mocnina mnohočlenu, nulu přidáváme kvůli poslednímu členu),
- a_i jsou reálná čísla (mocniny x můžeme násobit čímkoliv).

Přesná definice mnohočlenu s jednou proměnnou

Mnohočlen (Polynom) s jednou proměnou je výraz, který se dá zapsat jako:

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$, kde $a_0; a_1; a_2; \dots; a_n$ jsou reálná čísla, n je celé nezáporné číslo a x je proměnná.

Názvosloví

je-li $a_n \neq 0$ říkáme, že mnohočlen je „ n -tého stupně“, n je pak stupeň mnohočlenu

$a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ koeficienty mnohočlenu (pouze reálná čísla před mocninou neznámé)

členy mnohočlenu = součin koeficientu s odpovídající mocninou

neznámé (obecně se to píše takto: člen mnohočlenu je výraz ve tvaru $a_k x^k$, kde $0 \leq k \leq n$)

a_0 absolutní člen

$a_1 x^1 = a_1 x$ lineární člen

$a_2 x^2$ kvadratický člen

$a_3 x^3$ kubický člen

$a_1 x^1 + a_0$ lineární mnohočlen (mnohočlen 1. řádu, častěji se píše místo

$$a_1 x + a_0 \rightarrow ax + b)$$

$a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ kvadratický mnohočlen (mnohočlen 2. řádu, častěji se píše místo

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \rightarrow ax^2 + bx + c)$$

Pedagogická poznámka: Žáci tabulku neopisují. Údaje z ní si připisují pomocí šipek do definice. Ušetří se tak hodně času.

Pedagogická poznámka: Vždycky si povídáme o tom, že pojmenování členů je logické: absolutní = neměnný (bez proměnné), lineární = lineární funkce, kvadratický = blbnout na kvadrát, kubický = kubík vody (objemová jednotka).

Pedagogická poznámka: Následující dva příklady mohou působit zbytečně, ale zkušenost jednoznačně ukazuje, že obecné zápisy dělají studentům obrovské problémy. Ačkoliv se s nimi v učebnicích setkávají poměrně často (nebo by se spíš setkávat měli), jen velmi málo z nich se snaží jakýmkoliv způsobem interpretovat, co vlastně znamenají (jak se jasně ukáže, když je necháte následující příklad samostatně vyřešit).

Př. 3: Je dán mnohočlen $-x^3 + 2x^2 - \pi x + 3$. Urči jeho stupeň a jeho koeficienty a_0, a_1, a_2, a_3 . Napiš jeho kvadratický člen.

Napíšeme si pod sebe obecný tvar a konkrétní mnohočlen, porovnáním získáme hodnoty koeficientů.

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$-x^3 + 2x^2 - \pi x + 3$$

Z porovnání je zřejmé, že platí:

$$a_3 = -1, \quad a_2 = 2, \quad a_1 = -\pi, \quad a_0 = 3,$$

kvadratický člen: $2x^2$.

Př. 4: Je dán mnohočlen $3x^4 - 2x^2 + 3$. Urči jeho stupeň a všechny jeho koeficienty (tedy čísla $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$). Urči hodnotu koeficientu a_{n-2} .

n $n = 4$ (protože nejvyšší mocnina x je čtvrtá)

$a_4 = a_n = 3$

a_3 ($a_3 = a_{n-1}$) $a_3 = 0$ (mnohočlen neobsahuje žádný člen s x^3)

a_2 $a_2 = -2$ (před x^2 je -2)

a_1 $a_1 = 0$ (a_1 je vždy před x a když tam x není tak to znamená, že je vynásobené nulou a tedy $a_1 = 0$)

a_0 $a_0 = 3$ (a_0 je koeficient bez x)

a_{n-2} $a_{n-2} = a_{4-2} = a_2 = -2$

Pedagogická poznámka: Žáci většinou napíší koeficienty s konkrétním indexem. Koeficienty s n pak doděláváme s nápovědou od tabule.

Pedagogická poznámka: Ve zbytku hodiny už máme přepnuto jen na zadání příkladů. Žáci dokáží postupovat sami.

Seřazení mnohočlenu

Je zvykem zapisovat jednotlivé členy mnohočlenu v pořadí podle mocnin, s nejvyššími mocninami na začátku. Dodržování této konvence usnadňuje zápis, jeho kontrolu a urychluje počítání.

My budeme všechny mnohočleny uvádět seřazené.

Př. 5: Seřad' mnohočleny do konvenčního pořadí:

a) $2x - x^2\sqrt{3} + 2 + x^4$

b) $x^2y - 2x + 4x^3 + 2xy + 2 - 3x^2$

a) $2x - x^2\sqrt{3} + 2 + x^4 = x^4 - x^2\sqrt{3} + 2x + 2$

b) $x^2y - 2x + 4x^3 + 2xy + 2 - 3x^2 = 4x^3 + x^2y - 3x^2 + 2xy - 2x + 2$

Opačný mnohočlen

Koeficienty opačného mnohočlenu jsou čísla ke koeficientům původnímu mnohočlenu.

Př. 6: Najdi opačný mnohočlen k mnohočlenu $x^4 - 3x^2 + 2x - 1$.

Opačný mnohočlen: $-x^4 + 3x^2 - 2x + 1$.

Součet mnohočlenů

Mnohočleny sečteme tak, že sečteme koeficienty odpovídajících si členů mnohočlenu (členy se stejnou mocninou x pokud máme jednu neznámou, pokud je neznámých víc, musí být stejné mocniny všech).

Př. 7: Sečti mnohočleny.

a) $x^4 + 2x^2 - 3x + 5$

a) $3x^3 - 2x^2 + x - 4$

$$\text{b) } 3x^2 - xy + 2x - 2 \quad \text{a} \quad 4x^2y - 2xy - \sqrt{3}x + 3$$

Urči koeficient a_1 u výsledných mnohočlenů.

a)

$$x^4 + 2x^2 - 3x + 5 + (3x^3 - 2x^2 + x - 4) = x^4 + 3x^3 - 2x + 1$$

Koeficient a_1 je reálné číslo, které se nachází u $x \Rightarrow a_1 = -2$.

b)

$$3x^2 - xy + 2x - 2 + (4x^2y - 2xy - \sqrt{3}x + 3) = 3x^2 + 4x^2y - xy - 2xy + 2x - \sqrt{3}x - 2 + 3 =$$

$$3x^2 + 4x^2y - 3xy + (2 - \sqrt{3})x + 1$$

Koeficient a_1 je reálné číslo, které se nachází u $x \Rightarrow a_1 = 2 - \sqrt{3}$.

Rozdíl mnohočlenů

Mnohočleny odečteme tak, že k prvnímu mnohočlenu přičteme mnohočlen opačný k druhému (odečítanému) mnohočlenu.

Př. 8: Urči rozdíl mnohočlenů.

$$\text{a) } (x^4 + 2x^2 - 3x + 5) - (3x^3 - 2x^2 + x - 4)$$

$$\text{b) } (3x^2 - xy + 2x - 2) - (4x^2y - 2xy - \sqrt{3}x + 3).$$

a)

$$(x^4 + 2x^2 - 3x + 5) - (3x^3 - 2x^2 + x - 4) = x^4 + 2x^2 - 3x + 5 - 3x^3 + 2x^2 - x + 4 =$$

$$= x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + 9$$

b)

$$3x^2 - xy + 2x - 2 - (4x^2y - 2xy - \sqrt{3}x + 3) = 3x^2 - xy + 2x - 2 + (-4x^2y + 2xy + \sqrt{3}x - 3) =$$

$$= 3x^2 - 4x^2y - xy + 2xy + 2x + \sqrt{3}x - 2 - 3 = 3x^2 - 4x^2y + xy + (2 + \sqrt{3})x - 5$$

Příště už budeme počítat bez mezikroku, rovnou:

$$(x^4 + 2x^2 - 3x + 5) - (3x^3 - 2x^2 + x - 4) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + 9.$$

Př. 9: Zjednoduš.

$$\text{a) } 2x^2 + 3x - 2 + 2(x^2 + 1) - (3x^2 - 2x + 1)$$

$$\text{b) } 2x^4 - 3x + x(x^3 - 2x + 2) - x^2(3x^2 - x - 2)$$

$$\text{a) } 2x^2 + 3x - 2 + 2(x^2 + 1) - (3x^2 - 2x + 1) = 2x^2 + 3x - 2 + 2x^2 + 2 - 3x^2 + 2x - 1 =$$

$$= 2x^2 + 2x^2 - 3x^2 + 3x + 2x - 1 - 2 + 2 = x^2 + 5x - 1$$

b)
$$2x^4 - 3x + x(x^3 - 2x + 2) - x^2(3x^2 - x - 2) = 2x^4 - 3x + x^4 - 2x^2 + 2x - 3x^4 + x^3 + 2x^2 =$$
$$2x^4 + x^4 - 3x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 3x + 2x = x^3 - x$$

Shrnutí: Mnohočlen je speciální typ výrazu, kde jsou neznámé pouze v přirozených mocninách.