1.8.2 Násobení mnohočlenů

Předpoklady: 010801

Pedagogická poznámka: Neříkám žákům, jaký je správný postup. To že většina z nich prohlásí za správnou druhou možnost (tu správnou) s tím, že jim to už říkali ve škole mě nestačí (ani já jim nemusím říkat pravdu). Po čase určitě někdo přijde s dosazením, využití geometrie je vzácnější.

Př. 1: U výpočtu součinu mnohočlenů například $(2x+3)(x^2+2)$ se objevují dva výsledky:

a) $(2x+3)(x^2+2)=2x\cdot x^2+3\cdot 2=2x^3+6$,

b) $(2x+3)(x^2+2)=2x\cdot x^2+2x\cdot 2+3\cdot x^2+3\cdot 2=2x^3+3x^2+4x+6$.

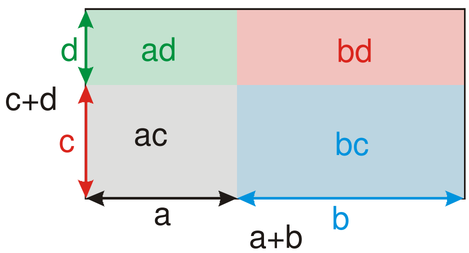
Najdi způsob, jak rozhodnout, který z nich je správný.

Vyzkoušíme oba postupy s konkrétními čísly, například pro $x=1$.

- $(2x+3)(x^2+2)=2x^3+6=2\cdot 1^3+6=8$
- $(2x+3)(x^2+2)=2\cdot 1^3+3\cdot 1^2+4\cdot 1+6=15$

Správný výsledek určíme dosazením do původního výrazu:
$(2x+3)(x^2+2)=(2\cdot 1+3)(1^2+2)=5\cdot 3=15$.

V příkladu jsme dokázali, že první postup je špatný, ale ne, že druhý je správný.
Přesvědčivější může být geometrie.
$(2x+3)(x^2+2)$ si přepíšeme jako $(a+b)(c+d)$, pořád jde o součin dvou součtů dvou čísel $(a+b)$ a $(c+d)$. Jaký je význam součinu dvou čísel?
Součin dvou čísel $(a+b)(c+d)$ interpretujeme jako obsah obdélníka o stranách $(a+b)$ a $(c+d)$.



Pro obsah obdélníku platí:

- $S=(a+b)(c+d)$,
- $S=ac+ad+bc+bd$,

$\Rightarrow\ (a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$.

Postup můžeme zobecnit i pro větší počet činitelů nebo více čísel v jednotlivých závorkách.

Součin mnohočlenů
Mnohočleny vynásobíme tak, že vynásobíme každý člen prvního mnohočlenu každým členem druhého mnohočlenu a výsledné členy pak sečteme.

Př. 2: Urči součin mnohočlenů $x+1$ a $3x^2-2$.

$(x+1)(3x^2-2)=x\cdot 3x^2+x\cdot(-2)+1\cdot 3x^2+1\cdot(-2)=3x^3+3x^2-2x-2$

Pedagogická poznámka: Pokud někdo počítá rovnou (a správně), samozřejmě ho nenutím, aby součiny rozepisoval.

Př. 3: Urči součin mnohočlenů x^2-2x a $xy-2x+1$.

$(x^2-2x)\cdot(xy-2x+1)=x^2\cdot xy+x^2(-2x)+x^2\cdot 1-2x(xy)-2x(-2x)-2x\cdot 1=$
$=x^3y-2x^3+x^2-2x^2y+4x^2-2x=x^3y-2x^3-2x^2y+5x^2-2x$

V dalších příkladech už budeme zkracovat zápis.

Př. 4: Spočti $(2x-3)^2$.

$(2x-3)^2=(2x-3)(2x-3)=4x^2-6x-6x+9=4x^2-12x+9$

Př. 5: Zjednoduš $(x+2)^2-(x+1)(x-3)$.

$(x+2)^2-(x+1)(x-3)=x^2+2x+2x+4-(x^2-3x+x-3)=$
Znaménko mínus patří ke všem členům, které vzniknou roznásobením druhé dvojice závorek.
$=x^2+4x+4-(x^2-2x-3)=6x+7$

Pedagogická poznámka: Většina chyb v předchozím příkladu vyplývá s vynecháním závorky za znaménkem mínus.

Př. 6: Spočti $(5-2x)^3$.

$(5-2x)^3=(5-2x)(5-2x)(5-2x)=(25-10x-10x+4x^2)(5-2x)=$
$=(25-20x+4x^2)(5-2x)=125-50x-100x+40x^2+20x^2-8x^3=$
$-8x^3+60x^2-150x+125$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je opět možné pojmout jako ukázku postupného řešení. Studenti musí nejprve vynásobit první dvě závorky mezi sebou a pak teprve vzniklý (zjednodušený!!) výsledek s poslední závorkou.

Př. 7: Výraz $a^2 - bc$ vyjádři jako mnohočlen, jestliže platí $a = 2x+1$, $b = 1-3x$, $c = 4+2x$.

$a^2 - bc = (2x+1)^2 - (1-3x)(4+2x) = (4x^2 + 2x + 2x + 1) - (4 + 2x - 12x - 6x^2) =$

$(4x^2 + 4x + 1) - (4 - 10x - 6x^2) = 4x^2 + 4x + 1 - 4 + 10x + 6x^2 = 10x^2 + 14x - 3$

Př. 8: Sbírka příklad 1.

Př. 9: Urči o kolik se zvětší hodnota výrazu $(x+2)(x^2 - x - 3)$, když se x zvětší o 2.

O kolik se zvětší hodnota = nová hodnota – stará hodnota.
Spočítáme starou hodnotu:

$(x+2)(x^2 - x - 3) = x(x^2) + x(-x) + x\cdot(-3) + 2x^2 + 2(-x) + 2\cdot(-3) =$

$x^3 - x^2 - 3x + 2x^2 - 2x - 6 = x^3 + x^2 - 5x - 6$

Nová hodnota: místo x dosadíme do výrazů $(x+2)$:

$[(x+2)+2][(x+2)^2 - (x+2) - 3] = (x+4)(x^2 + 4x + 4 - x - 2 - 3) =$

$(x+4)(x^2 + 3x - 1) = x(x^2) + x(3x) + x\cdot(-1) + 4x^2 + 4(3x) + 4\cdot(-1) =$

$x^3 + 3x^2 - x + 4x^2 + 12x - 4 = x^3 + 7x^2 + 11x - 4$

Odečteme obě hodnoty: nová – stará =

$x^3 + 7x^2 + 11x - 4 - (x^3 + x^2 - 5x - 6) = x^3 + 7x^2 + 11x - 4 - x^3 - x^2 + 5x + 6 =$

$6x^2 + 16x + 2$

Hodnota výrazu se zvětšila o výraz $6x^2 + 16x + 2$.

Dodatek: Novou hodnotu výrazu můžeme získat (a je to vzhledem ke KISS asi i správnější) dosazením do upraveného tvaru: $x^3 + x^2 - 5x - 6$.

$(x+2)^3 + (x+2)^2 - 5(x+2) - 6 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 + x^2 + 4x + 4 - 5x - 10 - 6 =$

$x^3 + 7x^2 + 11x - 4$

A bonbónek na konec.

Př. 10: Urči součin mnohočlenů $3x^2 - xy + 2x - 2$ a $4x^2y - 2xy - x$.

$$(3x^2 - xy + 2x - 2)(4x^2y - 2xy - x) =$$
$$3x^2(4x^2y) + 3x^2(-2xy) + 3x^2(-x)$$
$$-xy(4x^2y) - xy(-2xy) - xy(-x)$$
$$+2x(4x^2y) + 2x(-2xy) + 2x(-x)$$
$$-2(4x^2y) - 2(-2xy) - 2(-x) =$$
$$12x^4y - 6x^3y - 3x^3 - 4x^3y^2 + 2x^2y^2 + x^2y + 8x^3y - 4x^2y - 2x^2 - 8x^2y + 4xy + 2x =$$
$$12x^4y - 4x^3y^2 - 6x^3y + 8x^3y - 3x^3 + 2x^2y^2 + x^2y - 4x^2y - 8x^2y - 2x^2 + 4xy + 2x =$$
$$12x^4y - 4x^3y^2 + 2x^3y - 3x^3 + 2x^2y^2 - 11x^2y - 2x^2 + 4xy + 2x$$

Př. 11: Sbírka příklad 2.
Sbírka příklad 3.

Shrnutí: Při násobení mnohočlenů (stejně jako při násobení závorek) postupujeme systémem každý s každým.