

1.8.2 Násobení mnohočlenů

Předpoklady: 010801

Pedagogická poznámka: Neříkám žákům, jaký je správný postup. To že většina z nich prohlásí za správnou druhou možnost (tu správnou) s tím, že jim to už říkali ve škole mě nestačí (ani já jim nemusím říkat pravdu). Po čase určitě někdo přijde s dosazením, využití geometrie je vzácnější.

Př. 1: U výpočtu součinu mnohočlenů například $(2x+3)(x^2+2)$ se objevují dva výsledky:

a) $(2x+3)(x^2+2) = 2x \cdot x^2 + 3 \cdot 2 = 2x^3 + 6$,

b) $(2x+3)(x^2+2) = 2x \cdot x^2 + 2x \cdot 2 + 3 \cdot x^2 + 3 \cdot 2 = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 6$.

Najdi způsob, jak rozhodnout, který z nich je správný.

Vyzkoušíme oba postupy s konkrétními čísly, například pro $x = 1$.

- $(2x+3)(x^2+2) = 2x^3 + 6 = 2 \cdot 1^3 + 6 = 8$

- $(2x+3)(x^2+2) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 6 = 15$

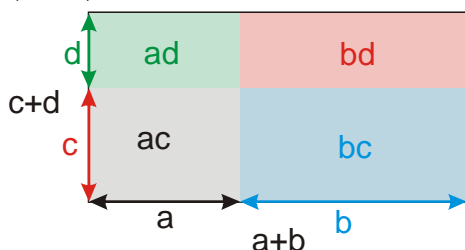
Správný výsledek určíme dosazením do původního výrazu:

$$(2x+3)(x^2+2) = (2 \cdot 1 + 3)(1^2 + 2) = 5 \cdot 3 = 15.$$

V příkladu jsme dokázali, že první postup je špatný, ale ne, že druhý je správný. Přesvědčivější může být geometrie.

$(2x+3)(x^2+2)$ si přepíšeme jako $(a+b)(c+d)$, pořád jde o součin dvou čísel $(a+b)$ a $(c+d)$. Jaký je význam součinu dvou čísel?

Součin dvou čísel $(a+b)(c+d)$ interpretujeme jako obsah obdélníka o stranách $(a+b)$ a $(c+d)$.



Pro obsah obdélníku platí:

- $S = (a+b)(c+d)$,

- $S = ac + ad + bc + bd$,

$$\Rightarrow (a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd.$$

Postup můžeme zobecnit i pro větší počet činitelů nebo více čísel v jednotlivých závorkách.

Součin mnohočlenů

Mnohočleny vynásobíme tak, že vynásobíme každý člen prvního mnohočlenu každým členem druhého mnohočlenu a výsledné členy pak sečteme.

Př. 2: Urči součin mnohočlenů $x+1$ a $3x^2-2$.

$$(x+1)(3x^2-2) = x \cdot 3x^2 + x \cdot (-2) + 1 \cdot 3x^2 + 1 \cdot (-2) = 3x^3 + 3x^2 - 2x - 2$$

Pedagogická poznámka: Pokud někdo počítá rovnou (a správně), samozřejmě ho nenutím, aby součiny rozepisoval.

Př. 3: Urči součin mnohočlenů x^2-2x a $xy-2x+1$.

$$\begin{aligned}(x^2-2x) \cdot (xy-2x+1) &= x^2 \cdot xy + x^2 \cdot (-2x) + x^2 \cdot 1 - 2x(xy) - 2x(-2x) - 2x \cdot 1 = \\ &= x^3y - 2x^3 + x^2 - 2x^2y + 4x^2 - 2x = x^3y - 2x^3 - 2x^2y + 5x^2 - 2x\end{aligned}$$

V dalších příkladech už budeme zkracovat zápis.

Př. 4: Spočti $(2x-3)^2$.

$$(2x-3)^2 = (2x-3)(2x-3) = 4x^2 - 6x - 6x + 9 = 4x^2 - 12x + 9$$

Př. 5: Spočti $(5-2x)^3$.

$$\begin{aligned}(5-2x)^3 &= (5-2x)(5-2x)(5-2x) = (25-10x-10x+4x^2)(5-2x) = \\ &= (25-20x+4x^2)(5-2x) = 125-50x-100x+40x^2+20x^2-8x^3 = \\ &= -8x^3+60x^2-150x+125\end{aligned}$$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je opět možné pojmut jako ukázkou postupného řešení. Studenti musí nejprve vynásobit první dvě závorky mezi sebou a pak teprve vzniklý výsledek s poslední závorkou.

Př. 6: Výraz a^2-bc vyjádři jako mnohočlen, jestliže platí $a=2x+1$, $b=1-3x$, $c=4+2x$.

$$\begin{aligned}a^2-bc &= (2x+1)^2 - (1-3x)(4+2x) = (4x^2+2x+2x+1) - (4+2x-12x-6x^2) = \\ &= (4x^2+4x+1) - (4-10x-6x^2) = 4x^2+4x+1-4+10x+6x^2 = 10x^2+14x-3\end{aligned}$$

Př. 7: Sbírka příklad 1.

Př. 8: Urči o kolik se zvětší hodnota výrazu $(x+2)(x^2-x-3)$, když se x zvětší o 2.

O kolik se zvětší hodnota = nová hodnota – stará hodnota.

Spočítáme starou hodnotu:

$$(x+2)(x^2-x-3) = x(x^2) + x(-x) + x(-3) + 2x^2 + 2(-x) + 2(-3) =$$

$$x^3 - x^2 - 3x + 2x^2 - 2x - 6 = x^3 + x^2 - 5x - 6$$

Nová hodnota: místo x dosadíme do výrazů $(x+2)$:

$$[(x+2)+2][(x+2)^2 - (x+2) - 3] = (x+4)(x^2 + 4x + 4 - x - 2 - 3) =$$

$$(x+4)(x^2 + 3x - 1) = x(x^2) + x(3x) + x(-1) + 4x^2 + 4(3x) + 4(-1) =$$

$$x^3 + 3x^2 - x + 4x^2 + 12x - 4 = x^3 + 7x^2 + 11x - 4$$

Odečteme obě hodnoty: nová – stará =

$$x^3 + 7x^2 + 11x - 4 - (x^3 + x^2 - 5x - 6) = x^3 + 7x^2 + 11x - 4 - x^3 - x^2 + 5x + 6 =$$

$$6x^2 + 16x + 2$$

Hodnota výrazu se zvětšila o výraz $6x^2 + 16x + 2$.

Dodatek: Novou hodnotu výrazu můžeme získat (a je to vzhledem ke KISS asi i správnější) dosazením do upraveného tvaru: $x^3 + x^2 - 5x - 6$.

$$(x+2)^3 + (x+2)^2 - 5(x+2) - 6 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 + x^2 + 4x + 4 - 5x - 10 - 6 =$$

$$x^3 + 7x^2 + 11x - 4$$

A bonbónek na konec.

Př. 9: Urči součin mnohočlenů $3x^2 - xy + 2x - 2$ a $4x^2y - 2xy - x$.

$$(3x^2 - xy + 2x - 2)(4x^2y - 2xy - x) =$$

$$3x^2(4x^2y) + 3x^2(-2xy) + 3x^2(-x)$$

$$-xy(4x^2y) - xy(-2xy) - xy(-x)$$

$$+2x(4x^2y) + 2x(-2xy) + 2x(-x)$$

$$-2(4x^2y) - 2(-2xy) - 2(-x) =$$

$$12x^4y - 6x^3y - 3x^3 - 4x^3y^2 + 2x^2y^2 + x^2y + 8x^3y - 4x^2y - 2x^2 - 8x^2y + 4xy + 2x =$$

$$12x^4y - 4x^3y^2 - 6x^3y + 8x^3y - 3x^3 + 2x^2y^2 + x^2y - 4x^2y - 8x^2y - 2x^2 + 4xy + 2x =$$

$$12x^4y - 4x^3y^2 + 2x^3y - 3x^3 + 2x^2y^2 - 11x^2y - 2x^2 + 4xy + 2x$$

Př. 10: Sbírka příklad 2.
Sbírka příklad 3.

Shrnutí: Při násobení mnohočlenů (stejně jako při násobení závorek) postupujeme systémem každý s každým.