

1.8.4 Použití vzorců při úpravách mnohočlenů II

Předpoklady: 010803

Pedagogická poznámka: Obsah hodiny odpovídá přibližně 20 minutám. Zbytek hodiny píšeme písemku nebo počítáme samostatně sbírku.

Pedagogická poznámka: Ekvivalent úvodního příkladu používám na pětiminutovku.

Př. 1: Vypočti.

$$\text{a) } (2x-3)^2 - (4x+1)(x-3) \qquad \text{b) } (3x+2)^2 - (9x-1)(x+2)$$

$$\text{a) } (2x-3)^2 - (4x+1)(x-3) = 4x^2 - 12x + 9 - (4x^2 - 12x + x - 3) = -x + 12$$

$$\text{b) } (3x+2)^2 - (9x-1)(x+2) = 9x^2 + 12x + 4 - (9x^2 + 18x - x - 2) = -5x + 6$$

Pedagogická poznámka: Problémy jsou s mínusem před závorkou, kterou žáci často nepíší.

Př. 2: Odvoď pomocí vzorce $(A+B)^3$, vzorec $(A-B)^3$. Urči podmínky, které bude muset výsledný vzorec splňovat, a s jejich pomocí jej zkontroluj.

Podmínky: Vzorec musí:

- být až na znaménko symetrický pro A a B ,
- součet mocnin A a B v každém členu musí dát dohromady třetí mocninu,
- musí obsahovat A^3 a B^3 ,
- před členy s lichou mocninou B musí být mínus.

Musíme v závorce $(A-B)$ vyrobiť mezi členy mínus $\Rightarrow (A-B) = (A+(-B))$.

$$(A-B)^3 = (A+(-B))^3 = A^3 + 3A^2(-B) + 3A(-B)^2 + (-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

$$(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

Př. 3: Vypočti pomocí vzorce $(2x-1)^3$.

$$(2x-1)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2 \cdot 1 + 3(2x) \cdot 1^2 - 1^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$$

Pedagogická poznámka: Ačkoliv jde o jednoduché dosazení, objevují se v příkladu poměrně často chyby, které vyplývají z toho, že žáci použijí mínus dvakrát a dosazují do tvaru $(2x-1)^3 = [2x-(-1)]^3$.

Př. 4: Vypočti pomocí vzorce $\left(3x^2y - \frac{1}{3}xy\right)^3$.

$$\begin{aligned}\left(3x^2y - \frac{1}{3}xy\right)^3 &= (3x^2y)^3 - 3 \cdot (3x^2y)^2 \left(\frac{1}{3}xy\right) + 3(3x^2y) \left(\frac{1}{3}xy\right)^2 - \left(\frac{1}{3}xy\right)^3 = \\ &= 27x^6y^3 - 9x^5y^3 + x^4y^3 - \frac{1}{27}x^3y^3\end{aligned}$$

Př. 5: Odvoď vzorce pro $(A+B)^4$ a $(A-B)^4$. Před vlastním výpočtem najdi podmínky, které budou muset vzorce splňovat, a po výpočtu podle nich zkontroluj své výsledky.

Podmínky: Vzorec pro $(A+B)^4$ musí:

- být symetrický pro A a B ,
- součet mocnin A a B v každém členu musí dát dohromady čtvrtou mocninu,
- musí obsahovat A^4 a B^4 ,
- všechny členy musí být kladné.

$$\begin{aligned}(A+B)^4 &= (A+B)^3(A+B) = (A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3)(A+B) = \\ &= A^4 + 3A^3B + 3A^2B^2 + AB^3 + A^3B + 3A^2B^2 + 3AB^3 + B^4 = \\ &= A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4\end{aligned}$$

Podmínky: Vzorec pro $(A-B)^4$ musí:

- být až na znaménko symetrický pro A a B ,
- součet mocnin A a B v každém členu musí dát dohromady čtvrtou mocninu,
- musí obsahovat A^4 a B^4 ,
- před členy s lichou mocninou B musí být mínus.

$$\begin{aligned}(A-B)^4 &= [A+(-B)]^4 = A^4 + 4A^3(-B) + 6A^2(-B)^2 + 4A(-B)^3 + (-B)^4 = \\ &= A^4 - 4A^3B + 6A^2B^2 - 4AB^3 + B^4\end{aligned}$$

Př. 6: Vypočti: $(2x-1)^4 - (x-2)^2(2x+3)^2$.

$$\begin{aligned}(2x-1)^4 - (x-2)^2(2x+3)^2 &= \\ &= (2x)^4 - 4(2x)^3 \cdot 1 + 6(2x)^2 \cdot 1^2 - 4(2x) \cdot 1^3 + 1^4 - (x^2 - 4x + 4)(4x^2 + 12x + 9) = \\ &= 16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1 - (4x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 16x^3 - 48x^2 - 36x + 16x^2 + 48x + 36) = \\ &= 16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1 - (4x^4 - 4x^3 - 23x^2 + 12x + 36) = 12x^4 - 28x^3 + 47x^2 - 20x - 35\end{aligned}$$

Př. 7: Sbíрка příklad 4.

Shrnutí: Vzorce jsou často pravidelné a dopředu odhadnutelné.