1.8.6 Rozklad mnohočlenů na součin I (vytýkání)

Předpoklady: 010805

Pedagogická poznámka: Na začátku každé rozkládací hodiny jsou přidány příklady na opakování úprav mnohočlenů. Důvod je jediný, čtyři rozkládací hodiny stačí k tomu, aby žáci pozbyli značnou část dovedností v úpravách, proto se je snažím průběžně udržovat.

Př. 1: Zjednoduš $(x-2)^3 - x(x+1)(x-2)$.

$$(x-2)^3 - x(x+1)(x-2) = \left(x^3 - 3\cdot x^2\cdot 2 + 3x\cdot 2^2 - 2^3\right) - x\left(x^2 - 2x + x - 2\right) =$$
$$= \left(x^3 - 6x^2 + 12x - 8\right) - x\left(x^2 - x - 2\right) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - x^3 + x^2 + 2x = -5x^2 + 14x - 8$$

Pedagogická poznámka: Rozklady mnohočlenů na součin je možné odbít ve dvou možná i během jediné hodiny. Přesto jim věnuji minimálně čtyři hodiny. Hlavním důvodem je fakt, že podle mého názoru jde o první ukázku netriviálního matematického uvažování. Jak je uvedeno v textu učebnice při rozkladu na součin si nevystačíme s mechanickým uplatňováním naučeného pravidla, musíme si pravidlo vybrat, často je potřeba mnohočlen předupravit, použít pravidel několik atd. Jsem přesvědčen, že právě na rozkladech je možné studentům ukázat hodně z těch obecnějších matematických dovedností než jaká představují konkrétní postupy na řešení konkrétních úloh.

Rozklad mnohočlenu na součin = místo jednoho mnohočlenu, napíšeme součin několika mnohočlenů
Proč?
Mnohočlen napsaný v součinu velice usnadňuje krácení ve zlomcích a řešení rovnic (některé se ani nenaučíme řešit jinak než pomocí rozkladu na součin).

Problém: Rozložit mnohočlen na součin je trochu jiný úkol, než jaké jsme dosud řešili. Zatím všechny naše úkoly (úpravy mocnin, dělení mnohočlenů, slovní úlohy na Venovy diagramy…) měly v podstatě jednoznačný způsob řešení. Pokud jsme poznali, o co jde, a nezkazili jsme pravidla, došli jsme k cíli.
Způsobů, jak rozložit mnohočleny je víc, některé se nedají použít rovnou a vyžadují předchozí upravení mnohočlenu $\Rightarrow$ už nebude stačit pamatovat si pravidla a používat je. Budeme muset umět vybrat to správné, odhadnout, jak mnohočlen změnit, aby s ním šlo něco udělat. Je to těžké, ale hodně se to podobá úskalí některých povolání (doktoři, správci sítí). Je to tvůrčí disciplína a pokud to nepůjde, není třeba si zoufat. Na druhé straně ještě více než jindy je třeba přemýšlet, co a jak dělám, jak by to mělo být, co jsem měl udělat.

Ještě než začneme
Jak je uvedeno v předchozím odstavci, rozklady na součin vyžadují kombinování mnoha různých metod. My si je postupně ukážeme a v poslední hodině, při řešení složitějších příkladů je budeme muset různě kombinovat. Dá se očekávat, že do té doby hodně z toho, co se naučíme v této nebo následující hodině zapomeneme. Proto si během probírání jednotlivých příkladů budeme na zvláštní papír zapisovat vzorce, metody nebo zajímavé triky,

abychom na konci dokázali rychleji vybírat to pravé. Budeme si průběžně sestavovat **Rozkladný arzenál**.

Pedagogická poznámka: Příprava rozkladného arzenálu mě přijde důležitá. Studenti opravdu během tří dnů dokáži skoro všechno zapomenout a tak jim může papír hodně pomocí. Zdůrazňuji, že během výuky by měl podobný „arzenál“ vznikat v jejich hlavách automaticky a jen kvůli tomu, že ho zatím sestavovat neumí, budeme si při tréninku pomáhat papírem.
Připomínám studentům také to, aby do arzenálu psali místa, která jsou jim divná, nebo ve kterých udělali chybu. Arzenál si na konci hodiny kontrolujeme a bavíme se o tom, co tam patří a co ne. Důležité při těchto diskusích je, aby studenti nezískali pocit, že sestavování něčeho takového je pro všechny dané a existuje nějaký ideální tvar.

1. Vytýkání před závorku

$2x+4y=2\cdot x+2\cdot 2y=2\cdot(x+2y)$ - oba členy se násobí 2, můžeme ji napsat před závorku.

Př. 2: Rozlož mnohočleny na součin pomocí vytýkání:
a) $2x^2-4x+6$ b) $xy-xz$ c) $9x^2y-12xy^2$ d) $2x^2-x\sqrt{2}$

a) $2x^2-4x+6=2\left(x^2-2x+3\right)$

b) $xy-xz=x(y-z)$

c) $9x^2y-12xy^2=3xy(3x-4y)$

d) $2x^2-x\sqrt{2}=x\left(2x-\sqrt{2}\right)$ nebo $2x^2-x\sqrt{2}=x\sqrt{2}\left(x\sqrt{2}-1\right)$

Pedagogická poznámka: U bodu d) studenti vytknou pouze *x*, druhý způsob je pouze ukázkou toho, že je v případě potřeby možné vytknout i něco navíc, ale účelnost takového vytýkání závisí na konkrétním kontextu.

Často se z výrazů vytýká znaménko mínus, například takto.
$-2x^2-3x+1=-\left(2x^2+3x-1\right)$

Př. 3: Zdůvodni, proč se v příkladu $-2x^2-3x+1=-\left(2x^2+3x-1\right)$ po vytknutí objevilo před absolutním členem znaménko mínus.

Existuje několik způsobů, jak objevení mínusu po vytknutí vysvětlit.
a) Budeme upravovat pomaleji, ve výrazu $-2x^2-3x+1$ není před jedničkou mínus $\Rightarrow$ musíme ho tam vyrobit, abychom ho mohl vytknout $\Rightarrow$ napíšeme:
$-2x^2-3x+1=-2x^2-3x-(-1)$ - teď už vytknout můžeme $\Rightarrow$
$-2x^2-3x+1=-2x^2-3x-(-1)=-\left(2x^2+3x-1\right)$ $\Rightarrow$ mínus se před jedničkou objevilo jako důsledek toho, že platí $-\cdot-=+$ a my jsme potřebovali před jedničkou mínus vyrobit.

b) Vnitřek závorky musí vypadat tak, abychom po roznásobení získali původní výraz:

$-(2x^2+3x-1)=-(2x^2)-(3x)-(-1)=-2x^2-3x+1 \Rightarrow$ kdyby nebylo před jedničkou mínus, nezískali bychom původní výraz $\Rightarrow$ vytknutí mínus znamená obrácení všech znamének ve výrazu.

Pedagogická poznámka: Smyslem předchozího odstavce rozhodně není bojovat proti rozšířenému „vytknutí mínusu obrátí všechny znaménka“. Klidně si to studenti mohou pamatovat tímto způsobem, ale je nutné, aby věděli, kde se takové pravidlo vzalo.

Př. 4: Vytkni z následujících mnohočlenů znaménko mínus.
a) $-3+2x-x^2\sqrt{2}$ b) $x^3+2x-\pi$ c) $-3x^2+3-\sqrt{2}$

a) $-3+2x-x^2\sqrt{2}=-(3-2x+x^2\sqrt{2})$

b) $x^3+2x-\pi=-(-x^3-2x+\pi)$

c) $-3x^2+3-\sqrt{2}=-(3x^2-3+\sqrt{2})$

Vytknout se dá i mnohočlen:
$3x^3+3x^2+2x+2=3x^2\cdot x+3x^2+2\cdot x+2=3x^2(x+1)+2(x+1)=(x+1)(3x^2+2)$.
Co k takovému vytknutí potřebujeme?
Musíme vytvořit dvě stejné závorky, ale neexistuje jednoznačný postup, pouze dobré strategie:

- rozdělit mnohočlen na dvě stejně početné části,
- dávat podobné členy k sobě,
- ...

Naštěstí cest k cíli existuje většinou více:
$3x^3+3x^2+2x+2=3x^3+2x+3x^2+2=x(3x^2+2)+(3x^2+2)=(3x^2+2)(x+1)$.

Př. 5: Rozlož mnohočlen na součin:
a) $2x^3-x^2+2x-1$ b) $3x^5-2x^3-3x^2+2$
c) $3x^4-2x^3+3x-2$ d) x^3-x^2-x+1
e) $(x-y)^2-3zx+3zy$

a) $2x^3-x^2+2x-1=x^2(2x-1)+(2x-1)\cdot 1=(2x-1)(x^2+1)$

b) $3x^5-2x^3-3x^2+2=x^3(3x^2-2)-(3x^2-2)=(3x^2-2)(x^3-1)$

c) $3x^4-2x^3+3x-2=3x^4+3x-2x^3-2=3x(x^3+1)-2(x^3+1)=(x^3+1)(3x-2)$

d) $x^3-x^2-x+1=x^2(x-1)-(x-1)=(x-1)(x^2-1)$

e) $(x-y)^2-3zx+3zy=(x-y)^2-3z(x-y)=(x-y)[(x-y)-3z]=(x-y)(x-y-3z)$

Pedagogická poznámka: Poměrně velká část žáků vytkne v bodě a) špatně takto: $x^2(2x-1)+(2x-1)\cdot 1=(2x-1)x^2$, protože v druhé polovině původního výrazu po vytknutí závorky "nic nezůstane". Nechám je zpětně roznásobovat jejich výsledek a hledat, co se kde ztratilo.

Hranaté závorky v bodě e) jsou při vytknutí samozřejmě zbytečné, ale při vytýkání složitějších výrazů umožňují psát stylem „přepíšu všechno, co tam bylo, a vynechám jen to, co jsem vytknul“.

Vytknout můžeme i to „co tam není“ $3x+2y=3\cdot\left(x+\frac{2}{3}y\right)$. Proč?

Pomaleji: $3x+2y=3x+1\cdot 2y=3x+\frac{3}{3}\cdot 2y=3\left(x+\frac{1}{3}2y\right)=3\cdot\left(x+\frac{2}{3}y\right)$. Jedničkou můžeme vynásobit cokoliv kdykoliv, napsat si ji jako $1=\frac{3}{3}$, abychom získali před členem $2y$ trojku také.

Stejným způsobem můžeme vytknout i *x*:

$$3x+2y=3x+1\cdot 2y=3x+\frac{x}{x}\cdot 2y=x\left(3+\frac{1}{x}2y\right)=x\cdot\left(3+\frac{2}{x}y\right).$$

Př. 6: Vytkni z mnohočlenu výraz uvedený v závorce.

a) $2x-1\quad\{2\}$

b) $9x^2+3x+1\quad\{3x\}$

c) $4x^2-2x+3\quad\{4\}$

d) $x^3+2x^2-x+3\quad\{x^2\}$

e) $2x^3-3x^2+5x-8\quad\{2x^3\}$

f) $2x^2-4x+8\quad\{-2\}$

g) $9x^2-4x+3\quad\{-3x\}$

h) $\frac{4}{3}x^2y-\frac{3}{2}y\quad\left\{\frac{2}{3}xy\right\}$

a) $2x-1=2x-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=2\left(x-\frac{1}{2}\right)$

b) $9x^2+3x+1=3x\cdot 3x+3x+3x\frac{1}{3x}=3x\left(3x+1+\frac{1}{3x}\right)$

c) $4x^2-2x+3=4\cdot x^2-4\cdot\frac{1}{4}\cdot 2x+4\cdot\frac{1}{4}\cdot 3=4\left(x^2-\frac{1}{4}2x+\frac{1}{4}3\right)=4\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right)$

d) $x^3+2x^2-x+3=x^2\cdot x+2\cdot x^2-x^2\frac{1}{x^2}x+x^2\frac{1}{x^2}3=x^2\left(x+2-\frac{1}{x^2}x+\frac{1}{x^2}3\right)=$
$=x^2\left(x+2-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)$

e) $2x^3-3x^2+5x-8=2x^3-2x^3\cdot\frac{1}{2x^3}\cdot 3x^2+2x^3\cdot\frac{1}{2x^3}\cdot 5x-2x^3\cdot\frac{1}{2x^3}\cdot 8=$
$2x^3\left(1-\frac{3x^2}{2x^3}+\frac{5x}{2x^3}-\frac{8}{2x^3}\right)=2x^3\left(1-\frac{3}{2x}+\frac{5}{2x^2}-\frac{4}{x^3}\right)$

f) $2x^2-4x+8=(-2)(-x^2)+2x(-2)-4(-2)=(-2)(-x^2+2x-4)$

g) $9x^2-4x+3=(-3x)(-3x)-(-3x)\frac{1}{-3x}4x+(-3x)\frac{1}{-3x}3=$
$=(-3x)\left[(-3x)-\frac{1}{-3x}4x+\frac{1}{-3x}3\right]=(-3x)\left(-3x+\frac{4}{3}-\frac{1}{x}\right)$

h) $\frac{4}{3}x^2y-\frac{3}{2}y=\frac{2}{3}xy\cdot 2x-\frac{2}{3}xy\cdot\frac{1}{\frac{2}{3}xy}\frac{3}{2}y=\frac{2}{3}xy\left(2x-\frac{\frac{3}{2}y}{\frac{2xy}{3}}\right)=\frac{2}{3}xy\left(2x-\frac{9}{4x}\right)$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad rozhodně není osou této hodiny, pokud na něj zbude jen minimum často nevadí to, důležitější je předchozí část hodiny.

Shrnutí: O správnosti vytknutí se přesvědčíme zpětným roznásobením.