1.8.7 Rozklad mnohočlenů na součin pomocí vzorců

Předpoklady: 010806

Př. 1: Vypočti.
a) $(2x-1)^2-(x+3)^2$ b) $(3x+1)^2-(x-2)^2$

a) $(2x-1)^2-(x+3)^2=4x^2-4x+1-(x^2+6x+9)=3x^2-10x-8$

b) $(3x+1)^2-(x-2)^2=9x^2+6x+1-(x^2-4x+4)=8x^2+10x-3$

Př. 2: Zapiš druhou mocninu závorky jako mnohočlen i jako součin.
a) $=(A+B)^2=$ b) $=(A-B)^2=$

$A^2+2AB+B^2=(A+B)^2=(A+B)(A+B)$
$A^2-2AB+B^2=(A-B)^2=(A-B)(A-B)$

Vzorce, které jsme používali na roznásobení závorek: $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ a $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$ dělají ze součinu mnohočlenů jeden mnohočlen (opak toho, co při rozkladu na součin chceme) $\Rightarrow$ můžeme je použít obráceným směrem než dosud a z jednoho mnohočlenu získáme součin mnohočlenů.

Je nutné napsat mnohočlen přesně ve tvaru vzorce.

$$A^2+2\cdot A\cdot B+B^2=(A+B)^2$$
$$x^2+8x+16=x^2+\underbrace{2\cdot x\cdot 4}_{8x}+4^2=(x+4)^2$$

Někdy není vzorec vidět na první pohled.

$$A^2-2A\ \ B\ +\ \ B^2=(A-B)^2$$
$$x^2-4xy+4y^2=x^2-2x(2y)+(2y)^2=(x-2y)^2$$

Některé mnohočleny na vzorec upravit nejdou.

$$A^2-2AB+B^2=(A-B)^2$$
$$x^2+2x+4=x^2+2x\cdot 1+2^2=$$
$\Rightarrow$ vzorec použít nemůžeme, protože B se nemůže rovnat zároveň 1 (podle členu $2x\cdot 1$) a 2 (podle členu 2^2).

Na začátku nemusí být pouze x^2.

$$A^2\ \ +2\ \ A\ \ B+B^2=(A+B)^2$$
$$4x^2+4xy+y^2=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot y+y^2=(2x+y)^2$$

Př. 3: Rozlož na součin pomocí vzorců:

a) x^2+6x+9 b) x^2-4x+4 c) $x^2+2xy^2+y^4$

d) $x^2+x+\frac{1}{4}$ e) $x^2-\frac{2}{3}xy+\frac{y^2}{9}$ f) $x^2+3x+\frac{9}{4}$

a)
$$A^2+2\cdot A\cdot B+B^2=(A+B)^2$$
$$x^2+6x+9=x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2=(x+3)^2$$

b)
$$A^2-2AB+B^2=(A-B)^2$$
$$x^2-4x+4=x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2=(x-2)^2$$

c)
$$A^2+2\cdot A\cdot B+B^2=(A+B)^2$$
$$x^2+2xy^2+y^4=x^2+2\cdot x\cdot y^2+\left(y^2\right)^2=\left(x+y^2\right)^2$$

d)
$$A^2+2AB+B^2=(A+B)^2$$
$$x^2+x+\frac{1}{4}=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$$

e)
$$A^2-2\;A\;B+B^2=(A-B)^2$$
$$x^2-\frac{2}{3}xy+\frac{y^2}{9}=x^2-2\cdot x\cdot\frac{y}{3}+\left(\frac{y}{3}\right)^2=\left(x-\frac{y}{3}\right)^2$$

f)
$$A^2+2AB+B^2=(A+B)^2$$
$$x^2+3x+\frac{9}{4}=x^2+2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$$

Pedagogická poznámka: Se zapisováním vzorců nad rozkládaný mnohočlen je to stejné jako v podobných příkladech. Netrvám na tom, ale rada „napiš si tam ten vzorec“ je první, kterou říkám, když si všimnu chyby.

Př. 4: Rozlož na součin pomocí vzorců:

a) $9x^2+18x+1$ b) $4x^2+12xy^3+9y^6$

c) $4cd-c^2-4d^2$ d) $2x^2-2\sqrt{6}xy+3y^2$

e) $x^2+6xy+2y^2$

a)
$$A^2+2\;A\;B+B^2=(A+B)^2$$
$$9x^2+18x+1=(3x)^2+2\cdot 3x\cdot 3+1^2=$$
$\Rightarrow$ pomocí vzorce rozložit **nejde,** *B* se nemůže najednou rovnat 3 a 1.

b)
$$\begin{matrix} A^2 + & 2\,A\,B & + B^2 & = (A+B)^2 \end{matrix}$$
$$4x^2+12xy^3+9y^6=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 3y^3+(3y^3)^2=(2x+3y^3)^2$$

c)
$$A^2-2\,A\,B+B^2 = (A+B)^2$$
$$4cd-c^2-4d^2=-(c^2-4cd+4d^2)=-\left[c^2-2\cdot c\cdot 2d+(2d)^2\right]=-(c-2d)^2$$

d)
$$A^2 - 2\cdot A\cdot B + B^2 = (A-B)^2$$
$$2x^2-2\sqrt{6}xy+3y^2=(\sqrt{2}x)^2-2\cdot\sqrt{2}x\cdot\sqrt{3}y+(\sqrt{3}y)^2=(\sqrt{2}x-\sqrt{3}y)^2$$

e)
$$A^2+2\cdot A\cdot B+B^2 = (A+B)^2$$
$$x^2+6xy+2y^2=x^2+2\cdot x\cdot 3y+(\sqrt{2}y)^2$$
$\Rightarrow$ pomocí vzorce rozložit **nejde**

Muselo by platit $B=3y=y\sqrt{2}$ a to platí jen, když $y=0$ $\Rightarrow$ pokud se nám nepodaří vyrobit přesně vzorec, máme smůlu.

Pedagogická poznámka: Je důležité zkontrolovat, zda studenti „nerozložili“ body a) a e), zejména slabší studenti mají tendenci „něco napsat“ a považovat úkol za splněný bez ohledu na pravdivost toho, co napsali.

Na rozkládání máme i jeden vzorec, který se nepoužívá k násobení.

$$A^2-B^2=(A-B)\cdot(A+B)$$

Vlastně ho už známe z rozšiřování zlomků.

$$A^2-B^2=(A-B)\cdot(A+B)$$
$$x^2-9=x^2-3^2=(x-3)\ (x+3)$$

Někdy se tomu musí trochu pomoci a mocniny „vyrobit“.

$$A^2 - B^2 = (A-B)\ (A+B)$$
$$2x^2-3=(\sqrt{2}x)^2-(\sqrt{3})^2=(\sqrt{2}x-\sqrt{3})(\sqrt{2}x+\sqrt{3})$$

Př. 5: Rozlož na součin pomocí vzorce $a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$ mnohočleny.

a) $4-y^2$ b) $9x^2-1$ c) $4y^3-9x^2y$

d) x^2-2 e) x^4-y^4 f) $9x^2-y^2+2xy-x^2$

a) $4-y^2=2^2-y^2=(2-y)(2+y)$

b) $9x^2-1=(3x)^2-1^2=(3x-1)(3x+1)$

c) $4y^3-9x^2y=y(4y^2-9x^2)=y\left[(2y)^2-(3x)^2\right]=y(2y-3x)(2y+3x)$

d) $x^2-2=x^2-(\sqrt{2})^2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

e) $x^4 - y^4 = (x^2)^2 - (y^2)^2 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x-y)(x+y)(x^2+y^2)$

f) $9x^2 - y^2 + 2xy - x^2$ - na první pohled to nevypadá, ale poslední tři členy něco připomínají

$9x^2 - y^2 + 2xy - x^2 = 9x^2 - (y^2 - 2xy + x^2) = (3x)^2 - (y-x)^2 =$

$= [3x - (y-x)][3x + (y-x)] = (4x-y)(2x+y)$

Př. 6: Najdi chybu v následujícím postupu.

$$a^2 + b^2 = a^2 - (-b)^2 = [a - (-b)][a + (-b)] = (a+b)(a-b)$$

Chyba je hned na začátku, postup připomíná známou úpravu $a + b = a - (-b)$, ale druhá mocnina je problém: $a^2 + b^2 = a^2 - (-b^2)$ je správně, ale nemůžeme napsat $(-b^2) = (-b)^2$, protože při umocňování na druhou zmizí mínus: $(-b)^2 = b^2$.

$\Rightarrow$ **Vzorec pro rozklad mnohočlenu $a^2 + b^2$ neexistuje (v množině reálných čísel).**

Pedagogická poznámka: Doporučuji zapsání faktu, že mnohočlen $a^2 + b^2$ nejde rozložit do rozkládacího arzenálu. Ti, kteří se „úspěšně“ o rozklad takového mnohočlenu kdykoliv později pokusí, si ho zapisují povinně.

Rozklady se dají použít i na první pohled neřešitelné příklady.

Př. 7: Urči, jakou nejmenší hodnotu může mít mnohočlen $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 8$.
(Nápověda: Platí: $(x-2)^2 \geq 0$).

Při dosazování různých čísel za x a y se mění hodnota mnohočlenu. Proč by měla existovat nejmenší možná hodnota? Existuje mnohočlen s nejmenší hodnotou?

Například $x^2 \geq 0$, podobně i $(x-3)^2 \geq 0$ (opět jde o číslo na druhou) $\Rightarrow$ zkusíme v mnohočlenu všechny neznámé uzavřít do závorek s druhou mocninou $\Rightarrow$ musíme tam vytvořit vzorce:

$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 8 = x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 - 4y + 4 - 4 + 8 =$

$= (x+1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + 8 = \underbrace{(x+1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(y-2)^2}_{\geq 0} + 3$

$\Rightarrow$ výraz $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 8$ je vždy větší nebo roven 3.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je parafrází na příklad z učebnice. Nejsem si úplně jistý, zda je nutné ho zařadit (pokud bych musel probírat rozklady rychleji, určitě bych ho vyřadil). Na druhou stranu je určitě hezkou ukázkou toho, na co se dají vzorce použít. Studenti s ním mají problémy a jen málo z nich ho dokáže vyřešit zcela samostatně, proto příliš dlouho nečekám, než jim řešení ukáži. Následující příklad řešíme pouze, když máme dostatek času.

Př. 8: Urči jakou nejmenší hodnotu může mít mnohočlen $x^2 + 4y^2 + 6x - 8y$.

Použijeme stejný postup jako v předchozím příkladu.

$x^2+4y^2+6x-8y=x^2+2x\cdot 3+3^2-3^2+(2y)^2-2\cdot 2y\cdot 2+2^2-2^2=$
$(x+3)^2-9+(2y-2)^2-4=(x+3)^2+(2y-2)^2-13$
Pro hodnoty mnohočlenu platí, že jsou vždy ≥ -13.

Shrnutí: $A^2-B^2=(A-B)\cdot(A+B)$, A^2+B^2 rozložit neumíme.