1.8.8 Rozklad mnohočlenů na součin III

Předpoklady: 010807

Př. 1: Zjednoduš $(2x-1)^3-(2x+1)(3x-2)$.

$(2x-1)^3-(2x+1)(3x-2)=\left[(2x)^3-3(2x)^2+3\cdot 2x-1\right]-\left(6x^2-4x+3x-2\right)=$
$=8x^3-12x^2+6x-1-\left(6x^2-x-2\right)=8x^3-18x^2+7x+1$

Pedagogická poznámka: Hodinu dělím přibližně na poloviny, dvacet minut je minimum na vysvětlení a procvičení rozkladu mnohočlenu x^2+px+q.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je samozřejmě opakování zcela základních faktů, které by všichni měli znát. Realita ovšem taková není, bod a) je většinou v pořádku, ale v bodu b) jen menšina žáků napíše, že rozklad není možný, většina udělá jednu z chyb, které využijeme v následujícím příkladu.

Př. 2: Rozlož na součin mnohočleny.
a) a^2-b^2 b) a^2+b^2

a) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ b) $a^2+b^2=$ nelze

Př. 3: Zdůvodni, proč následující rozklady nemohou být správné.
a) $a^2+b^2=(a+b)(a+b)$ b) $a^2+b^2=(a-b)(a-b)$
c) $a^2+b^2=\left[a+(-b)\right]\left[a-(-b)\right]$

a) $a^2+b^2=(a+b)(a+b)$
Víme, že platí $(a+b)(a+b)=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \Rightarrow a^2+b^2\neq(a+b)(a+b)$
b) $a^2+b^2=(a-b)(a-b)$
Víme, že platí $(a-b)(a-b)=(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \Rightarrow a^2+b^2\neq(a-b)(a-b)$
c) $a^2+b^2=\left[a+(-b)\right]\left[a-(-b)\right]$
Víme, že platí $\left[a+(-b)\right]\left[a-(-b)\right]=(a-b)(a+b)=a^2-b^2 \Rightarrow$
$a^2+b^2\neq\left[a+(-b)\right]\left[a-(-b)\right]$

Pedagogická poznámka: Rozebrání chyb je dobré provést i s těmi, kteří si pamatují, že mnohočlen a^2+b^2 rozložit nelze. Zdůrazňuji, že matematicky uvažující lidé se od ostatních odlišují právě tím, že o všem, co napíší, podobným způsobem přemýšlejí.

Existují i vzorce pro rozklad některých mnohočlenů s třetími mocninami. Jak si vzorce pamatovat?

Př. 4: Odhadni co nejpřesněji, jaké mnohočleny budou vystupovat v následujících vzorcích v prázdných závorkách. Odhady ověř výpočtem.

a) $a^3+b^3=(a+b)\cdot(\qquad\qquad)$ b) $a^3-b^3=(a-b)\cdot(\qquad\qquad)$

V obou bodech platí, že závorka musí obsahovat:

- člen a^2 (aby po roznásobení s a z první závorky vznikl člen a^3)
- člen b^2 (aby po roznásobení s b z první závorky vznikl člen b^3)
- další člen ab, který se roznásobí se závorkou, aby odečetl členy a^2b a b^2a.

Odhad můžeme potvrdit dělením.

$$
\begin{aligned}
&(a^3+b^3):(a+b)=a^2-ab+b^2\\
&\underline{-(a^3+a^2b)}\\
&\quad -a^2b+b^3\\
&\quad \underline{-(a^2b-ab^2)}\\
&\qquad ab^2+b^3\\
&\qquad \underline{-(ab^2+b^3)}\\
&\qquad\qquad 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(a^3-b^3):(a-b)=a^2+ab+b^2\\
&\underline{-(a^3-a^2b)}\\
&\quad a^2b-b^3\\
&\quad \underline{-(a^2b-ab^2)}\\
&\qquad ab^2-b^3\\
&\qquad \underline{-(ab^2-b^3)}\\
&\qquad\qquad 0
\end{aligned}
$$

Další vzorce pro rozklad mnohočlenů:

$$a^3+b^3=(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)$$
$$a^3-b^3=(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$$

Pedagogická poznámka: Ptám se studentů, jestli už první ze vzorců náhodou neviděli. Je zajímavé, kdo si vzpomene, že před týdnem šlo o poslední příklad na dělení mnohočlenů. Dělení mnohočlenů může být v situaci, kdy známe jeden z mnohočlenů, na které máme rozkládat (například při krácení), další metodou.

Př. 5: Rozlož pomocí vzorce na součin mnohočleny.

a) x^3+8 b) x^3-1

a)
$$a^3+b^3=(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)$$
$$x^3+8=x^3+2^3=(x+2)\cdot(x^2-x\cdot2+2^2)=(x+2)(x^2-2x+4)$$

b)
$$a^3-b^3=(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$$
$$x^3-1=x^3-1^3=(x-1)\cdot(x^2+x\cdot1+1^2)=(x-1)(x^2+x+1)$$

Př. 6: Rozlož na součin mnohočleny.

a) $27x^3-1$ b) x^6+1 c) x^6-1

$a=3x, b=1$

a) $27x^3-1=(3x)^3-1^3=(3x-1)\cdot\left[(3x)^2+3x\cdot1+1^2\right]=(3x-1)(9x^2+3x+1)$

$a=x^2, b=1$

b) $x^6+1=(x^2)^3+1=(x^2+1)\left[(x^2)^2-x^2+1\right]=(x^2+1)(x^4-x^2+1)$

$a=x^2, b=1$

c) $x^6-1=(x^2)^3-1^3=(x^2-1)\left[(x^2)^2+x^2+1\right]=(x-1)(x+1)(x^4+x^2+1)$

Můžeme postupovat i jinak.

$x^6-1=(x^3)^2-1^2=(x^3-1)(x^3+1)=(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$

Výsledky vypadají jinak, zkusíme roznásobením, zda jsou stejné.

$(x^2+x+1)(x^2-x+1)=x^4-x^3+x^2+x^3-x^2+x+x^2-x+1=x^4+x^2+1$

$\Rightarrow$ první výsledek není ještě hotový $\Rightarrow$ budeme se ještě muset moc a moc učit.

Pedagogická poznámka: Stejně jako v podobných situacích i v bodě a) je první radou, aby si studenti upravili výraz do tvaru $27x^3-1=(3x)^3-1^3$. Většina z nich to sama nedělá.
Druhý způsob řešení bodu c) většinou nikoho nenapadne $\Rightarrow$ napíši začátek na tabuli a nechám je dopočítat řešení. Problémy jsou v druhém kroku, kdy žáci musí použít najednou oba vzorce.

Rozklad mnohočlenů x^2+px+q

Například mnohočlen: $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$. Jak jsme na rozklad přišli?

Zkusíme si zpětně roznásobit předchozí rozklad a sledovat, jak vzniknou členy v mnohočlenu.

$(x+1)(x+2)=x^2+2x+1\cdot x+2\cdot1=x^2+(2+1)x+2\cdot1$

$(x+r)(x+s)=x^2+s\cdot x+r\cdot x+s\cdot r=x^2+(s+r)x+r\cdot s$

Máme trojčlen x^2+px+q a chceme ho rozložit na součin $(x+r)(x+s)$ $\Rightarrow$ známe čísla *p* a *q* a chceme najít čísla *r*, *s* $\Rightarrow$ porovnáme dva zápisy mnohočlenu:

$x^2+px+q=x^2+(s+r)x+r\cdot s$ $\Rightarrow$ $s+r=p$ a $r\cdot s=q$ = hledáme čísla, která po vynásobení dají *q* a po sečtení *p*.

Konkrétně: Rozkládáme mnohočlen x^2+4x+3 $\Rightarrow$ hledáme čísla, která po vynásobení dají 3 a po sečtení 4 $\Rightarrow$ $r=3; s=1$ $\Rightarrow$ $x^2+4x+3=(x+3)(x+1)$.

Pedagogická poznámka: Následující příklad ještě řeším napůl na tabuli, příklad 7 pak řeší žáci zcela sami. Těm, kteří si nejsou jistí, doporučuji v příkladu 6 psát poznámky typu: „hledám čísla se součinem 10 a součtem 7“.

Př. 7: Rozlož na součin mnohočlen.
a) $x^2+7x+10$ b) x^2-2x-3 c) x^2+x+4

a) $x^2+7x+10$
Hledáme čísla, jejichž součet je 7 a součin 10. Možnosti pro součin 10: $1\cdot 10$ nebo $2\cdot 5$, platí $5+2=7 \Rightarrow x^2+7x+10=(x+2)\cdot(x+5)$.

b) x^2-2x-3
Hledáme čísla, jejichž součet je -2 a součin -3. Možnosti pro součin -3: $(-3)\cdot 1$ nebo $(-1)\cdot 3$, platí $-3+1=-2 \Rightarrow x^2-2x-3=(x-3)\cdot(x+1)$.

c) x^2+x+4
Hledáme čísla, jejichž součet je 1 a součin 4. Možnosti pro součin 4: $1\cdot 4$, platí $4+1=5 \Rightarrow$ touto metodou nedokážeme mnohočlen rozložit.

Př. 8: Rozlož na součin následující trojčleny:
a) $x^2+9x+20$ b) x^2-x-6 c) $x^2+3x-18$
d) $x^2+17x+30$ e) x^2-2x+6 f) x^2-5x+6
g) $x^2+8x+16$ h) $x^2-8x+12$ i) $x^2+3x-70$

a) $x^2+9x+20=(x+5)\cdot(x+4)$

b) $x^2-x-6=(x+2)\cdot(x-3)$

c) $x^2+3x-18=(x+6)\cdot(x-3)$

d) $x^2+17x+30=(x+2)(x+15)$

e) $x^2-2x+6=$ nelze, číslo 6 můžeme získat buď jako $1\cdot 6=6$ nebo $2\cdot 3=6$. Ani z jedné dvojice těchto čísel nelze po součtu získat –2 $\Rightarrow$ nelze vytvořit rozdíl z celých čísel.

f) $x^2-5x+6=(x-2)\cdot(x-3)$

g) $x^2+8x+16=(x+4)(x+4)$

h) $x^2-8x+12=(x-6)(x-2)$

i) $x^2+3x-70=(x-7)(x+10)$

$x^2+px+q=x^2+(s+r)x+r\cdot s \Rightarrow s+r=p$ a $r\cdot s=q$ = hledáme čísla, která po vynásobení dají q a po sečtení p.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je BONUS, proto jej v hodině nepočítáme ani jeho výsledky v dalších hodinách nepoužíváme. Je určen pouze pro mimořádně nadané.

Př. 9: BONUS: Pokus najít postup, kterým je možné rozložit trojčlen ve tvaru ax^2+px+q na součin $(ax+b)(x+c)$.

Zkusíme postupovat podobně u hledání rozkladů pro trojčlen $x^2+px+q \Rightarrow$
Roznásobíme závorky rozkladu: $(ax+b)(x+c)=ax^2+acx+bx+bc=ax^2+(ac+b)x+bc$
Porovnáme obě vyjádření:

$ax^2 + \quad px + \quad q$

$ax^2 + (ac+b)x + bc$

Velmi podobná situace: hledáme dvojici čísel ac a b, jejichž součet $ac+b$ odpovídá koeficientu p u nerozloženého trojčlenu a jejichž součin abc odpovídá součinu $a \cdot q$ u nerozloženého trojčlenu $ax^2 + px + q$.

Ověření postupu na příkladu trojčlenu $3x^2 + 10x + 3$.

Určíme součin aq: $3 \cdot 3 = 9$.

Hledáme dvě čísla, jejichž součet se rovná 10 a součin 9 $\Rightarrow$ jde o čísla $ac = 9$ a $b = 1$.

Protože již víme, že platí $a = 3$, platí i $c = 3$. Hledaný součin je tedy $(ax+b)(x+c) = (3x+1)(x+3)$.

Zkouška roznásobením: $(3x+1)(x+3) = 3x^2 + 9x + x + 3 = 3x^2 + 10x + 3$.

Shrnutí: $x^2 + 9x + 20 = (x+5)\cdot(x+4)$ $\Rightarrow$ do závorek hledáme k x čísla, která po vynásobení dají 20 a po sečtení 9.