

1.8.9 Rozklad mnohočlenů na součin IV

Předpoklady: 010808

Někdy je potřeba trochu fantazie a předvídavosti.

Př. 1: Rozlož na součin mnohočlen $3y^2 + 4y + 1$.

Všechny předchozí mnohočleny, které jsme nerozkládali pomocí vzorců, byly čtyřčlenné. Vyráběli jsme dva stejné dvojčleny, které jsme vytkli, teď nám jeden člen chybí \Rightarrow jeden ze členů si rozdělíme na dva (poznat který a jak chce odhad a zkušenosti).

$$3y^2 + 4y + 1 = 3y^2 + 3y + y + 1 = 3y \cdot (y+1) + (y+1) = (y+1)(3y+1)$$

Rozdělit $4y = 3y + y$ je výhodné, aby byl jeden člen s trojkou k $3y^2$ a jeden s jedničkou k 1.

Pedagogická poznámka: Myšlenku před řešením říkám studentům brzo, ale nad tím, jaký člen a jak konkrétně rozdělíme, je nechám chvíli rozmyslet.

Často je možností víc a všechny správné vedou ke stejnému cíli.

Př. 2: Rozlož na součin mnohočleny.

a) $3x^2 + 5x + 2$

b) $2x^2 - x - 1$

a) $3x^2 + 5x + 2$

Rozdělíme $5x = 3x + 2x$.

$$3x^2 + 5x + 2 = 3x^2 + 3x + 2x + 2 = 3x(x+1) + 2(x+1) = (x+1)(3x+2)$$

b) $2x^2 - x - 1$

Rozdělíme $-x = -2x + x$.

$$2x^2 - x - 1 = 2x^2 - 2x + x - 1 = 2x(x-1) + (x-1) = (x-1)(2x+1)$$

Ke stejnému výsledku se můžeme dostat i trochu jiným způsobem.

$$2x^2 - x - 1 = 2x^2 + x - 2x - 1 = x(2x+1) - (2x+1) = (2x+1)(x-1)$$

Př. 3: Rozlož na součin mnohočleny.

a) $x^3 - 7x + 6$

b) $x^3 - 3x^2 + 4$

a) $x^3 - 7x + 6$

Rozdělíme $-7x = -x - 6x$.

$$x^3 - 7x + 6 = x^3 - x - 6x + 6 = x(x^2 - 1) - 6(x-1) = x(x-1)(x+1) - 6(x-1) =$$

$$(x-1)[x(x+1) - 6] = (x-1)(x^2 + x - 6)$$

Ještě to půjde dále, zkusíme rozložit mnohočlen $x^2 + x - 6 \Rightarrow$ hledáme čísla, jejichž součin je -6 a součet $+1 \Rightarrow x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$.

Dosadíme do mezivýsledku: $x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x^2 + x - 6) = (x-1)(x+3)(x-2)$.

b) $x^3 - 3x^2 + 4$

Potřebujeme členy s jedničkou a trojkou \Rightarrow rozdělíme $4 = 3 + 1$.

$$x^3 - 3x^2 + 4 = x^3 - 3x^2 + 3 + 1 = x^3 + 1 - 3x^2 + 3 = (x^3 + 1) - 3(x^2 - 1) =$$

Budeme pokračovat v rozkládání a doufat, že vytkneme.

$$(x+1)(x^2 - x + 1) - 3(x-1)(x+1) = (x+1)[(x^2 - x + 1) - 3(x-1)] =$$

$$(x+1)(x^2 - x + 1 - 3x + 3) = (x+1)(x^2 - 4x + 4) = (x+1)(x-2)^2$$

Jiný postup, rozdělíme $-3x^2 = x^2 - 4x^2$.

$$x^3 - 3x^2 + 4 = x^3 + x^2 - 4x^2 + 4 = x^2(x+1) - 4(x^2 - 1) =$$

$$x^2(x+1) - 4(x+1)(x-1) = (x+1)[x^2 - 4(x-1)] = (x+1)(x^2 - 4x + 4) =$$

$$(x+1)(x-2)^2$$

Ještě jiný postup, rozdělíme $-3x^2 = -x^2 - 2x^2$.

$$x^3 - 3x^2 + 4 = x^3 - 2x^2 - x^2 + 4 = x^2(x-2) - (x^2 - 4) = x^2(x-2) - (x-2)(x+2) =$$

$$= (x-2)[x^2 - (x+2)] = (x-2)(x^2 - x - 2) = (x-2)(x-2)(x+1) = (x-2)^2(x+1)$$

Pedagogická poznámka: U předchozího i následujícího příkladu zkusíme na tabuli různé nápady a ukazujeme si, že mnohé je možné dovést do konce a i špatné nápady jsou užitečné, protože nám pomáhají poznat, jak by takový rozklad měl vypadat, aby v následujícím kroku bylo možné vytknout.

Př. 4: (BONUS) Rozlož na součin mnohočleny.

a) $x^3 - 12x + 16$

b) $2x^2 + x - 6$

a) $x^3 - 12x + 16$

K x potřebujeme třetí mocninu nějakého čísla, nejspíš $2^3 = 8 \Rightarrow$ rozložíme $16 = -8 + 24$.

$$x^3 - 12x + 16 = x^3 - 8 - 12x + 24 = x^3 - 2^3 - 12(x-2) = (x-2)(x^2 + 2x + 4) - 12(x-2) =$$

$$(x-2)[x^2 + 2x + 4 - 12] = (x-2)(x^2 + 2x - 8) = (x-2)(x-2)(x+4)$$

b) $2x^2 + x - 6$

Zkusíme rozložit x tak, aby ve vzniklých dvojicích byl stejný poměr mezi větší a menší mocninou (po vytknutí pak získáme to samé) $\Rightarrow x = 4x - 3x$.

$$2x^2 + x - 6 = 2x^2 + 4x - 3x - 6 = 2x(x+2) - 3(x+2) = (x+2)(2x-3)$$

Jiné řešení: zkusíme rozdělit 6: $2x^2 + x - 6 = 2x^2 - 4 + x - 2 = 2(x^2 - 2) + (x-2)$ v první

závorce máme s x^2 příliš malé číslo, pro rozklad $(x^2 - 4)$ bychom potřebovali číslo dvakrát

$$2x^2 + x - 6 = 2x^2 - 8 + x + 2 = 2(x^2 - 4) + (x+2) = 2(x-2)(x+2) + (x+2) =$$

větší:

$$= (x+2)[2(x-2) + 1] = (x+2)(2x-3)$$

Složitější příklady

Při řešení složitějších příkladů musíme použít metody z minulých hodin (vytýkání, vzorec, rozepsání), v některých případech i několikrát, ale před tím bude většinou třeba mnohočlen upravit. Několik rad:

- pokud je možné udělat alespoň částečný rozklad (vytknutím nebo použitím vzorce) uděláme ho, zbytek pak bude snáz vidět,
- pokud je v mnohočlenu kus vzorce, zkusíme ho dodělat,
- na vytýkání je třeba mít dvakrát to samé, musíme tedy mnohočlen upravit tak, aby se v něm něco opakovalo,
- pro částečné vytýkání je dobré dát k sobě členy, které mají něco společného.

Př. 5: Rozlož na součin mnohočleny:

a) $x^5 + x^3 - x^2 - 1$

b) $a^2 + 2ab + b^2 - 2ac - 2bc$

c) $3p^4 - p^3 + p - 3$

d) $8(2x + y)^2 - 18(x - 2y)^2$

a) $x^5 + x^3 - x^2 - 1$

Zkusíme z první části s vysokými mocninami udělat to samé, co je v druhé části

$$x^5 + x^3 - x^2 - 1 = x^3 \cdot (x^2 + 1) - (x^2 + 1) = (x^2 + 1) \cdot (x^3 - 1) = (x^2 + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)$$

b) $a^2 + 2ab + b^2 - 2ac - 2bc$

V první části je vzorec, ze zbytku je možné něco vytknout.

$$a^2 + 2ab + b^2 - 2ac - 2bc = (a + b)^2 - 2c \cdot (a + b) = (a + b) \cdot [(a + b) - 2c] = (a + b) \cdot (a + b - 2c)$$

c) $3p^4 - p^3 + p - 3$

Potřebujeme vyrobit dvakrát to samé \Rightarrow zkusíme dát trojky k sobě.

$$3p^4 - p^3 + p - 3 = 3p^4 - 3 - p^3 + p = 3 \cdot (p^4 - 1) - p \cdot (p^2 - 1) = \dots$$

Zatím nemáme co vytknout, ale mnohočlen $(p^4 - 1)$ je možné rozložit.

$$3 \cdot (p^4 - 1) - p \cdot (p^2 - 1) = 3 \cdot (p^2 - 1) \cdot (p^2 + 1) - p \cdot (p^2 - 1) = (p^2 - 1) \cdot [3 \cdot (p^2 + 1) - p] = \\ = (p - 1) \cdot (p + 1) \cdot (3p^2 - p + 3)$$

d) $8(2x + y)^2 - 18(x - 2y)^2$

Mnohočlen připomíná vzorec $a^2 - b^2$, zkusíme ho vyrobit.

$$8(2x + y)^2 - 18(x - 2y)^2 = 2 \left[4(2x + y)^2 - 9(x - 2y)^2 \right] = 2 \left[[2(2x + y)]^2 - [3(x - 2y)]^2 \right] = \\ = 2 \left[\begin{matrix} a^2 & - & b^2 \\ (a - b) & (a + b) \end{matrix} \right] = 2 \left[2(2x + y) - 3(x - 2y) \right] \left[2(2x + y) + 3(x - 2y) \right] = 2(4x + 2y - 3x + 6y)(4x + 2y + 3x - 6y) = \\ = 2(x + 8y)(7x - 4y)$$

Př. 6: Sbírka příklad 7.

Shrnutí: Některé trojčlenné mnohočleny rozložíme tím, že si jeden z členů rozdělíme na dvě části.