1.8.9 Rozklad mnohočlenů na součin IV

Předpoklady: 010808

Někdy je potřeba trochu fantazie a předvídavosti.

Př. 1: Rozlož na součin mnohočlen $3y^2+4y+1$.

Všechny předchozí mnohočleny, které jsme nerozkládali pomocí vzorců, byly čtyřčlenné. Vyráběli jsme dva stejné dvojčleny, které jsme vytkli, teď nám jeden člen chybí $\Rightarrow$ jeden ze členů si rozdělíme na dva (poznat který a jak chce odhad a zkušenosti).

$3y^2+4y+1=3y^2+3y+y+1=3y\cdot(y+1)+(y+1)=(y+1)(3y+1)$

Rozdělit $4y=3y+y$ je výhodné, aby byl jeden člen s trojkou k $3y^2$ a jeden s jedničkou k 1.

Pedagogická poznámka: Myšlenku před řešením říkám studentům brzo, ale nad tím, jaký člen a jak konkrétně rozdělíme, je nechám chvilku rozmyslet.

Často je možností víc a všechny správné vedou ke stejnému cíli.

Př. 2: Rozlož na součin mnohočleny.
a) $3x^2+5x+2$ b) $2x^2-x-1$

a) $3x^2+5x+2$
Rozdělíme $5x=3x+2x$.
$3x^2+5x+2=3x^2+3x+2x+2=3x(x+1)+2(x+1)=(x+1)(3x+2)$

b) $2x^2-x-1$
Rozdělíme $-x=-2x+x$.
$2x^2-x-1=2x^2-2x+x-1=2x(x-1)+(x-1)=(x-1)(2x+1)$
Ke stejnému výsledku se můžeme dostat i trochu jiným způsobem.
$2x^2-x-1=2x^2+x-2x-1=x(2x+1)-(2x+1)=(2x+1)(x-1)$

Př. 3: Rozlož na součin mnohočleny.
a) x^3-7x+6 b) x^3-3x^2+4

a) x^3-7x+6
Rozdělíme $-7x=-x-6x$.
$x^3-7x+6=x^3-x-6x+6=x(x^2-1)-6(x-1)=x(x-1)(x+1)-6(x-1)=$
$(x-1)[x(x+1)-6]=(x-1)(x^2+x-6)$
Ještě to půjde dále, zkusíme rozložit mnohočlen x^2+x-6 $\Rightarrow$ hledáme čísla, jejichž součin je –6 a součet +1 $\Rightarrow$ $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$.
Dosadíme do mezivýsledku: $x^3-7x+6=(x-1)(x^2+x-6)=(x-1)(x+3)(x-2)$.

b) x^3-3x^2+4
Potřebujeme členy s jedničkou a trojkou $\Rightarrow$ rozdělíme $4=3+1$.
$x^3-3x^2+4=x^3-3x^2+3+1=x^3+1-3x^2+3=\left(x^3+1\right)-3\left(x^2-1\right)=$
Budeme pokračovat v rozkládání a doufat, že vytkneme.
$(x+1)\left(x^2-x+1\right)-3(x-1)(x+1)=(x+1)\left[\left(x^2-x+1\right)-3(x-1)\right]=$
$(x+1)\left(x^2-x+1-3x+3\right)=(x+1)\left(x^2-4x+4\right)=(x+1)(x-2)^2$

Jiný postup, rozdělíme $-3x^2=x^2-4x^2$.
$x^3-3x^2+4=x^3+x^2-4x^2+4=x^2(x+1)-4\left(x^2-1\right)=$
$x^2(x+1)-4(x+1)(x-1)=(x+1)\left[x^2-4(x-1)\right]=(x+1)\left(x^2-4x+4\right)=$
$(x+1)(x-2)^2$

Ještě jiný postup, rozdělíme $-3x^2=-x^2-2x^2$.
$x^3-3x^2+4=x^3-2x^2-x^2+4=x^2(x-2)-\left(x^2-4\right)=x^2(x-2)-(x-2)(x+2)=$
$=(x-2)\left[x^2-(x+2)\right]=(x-2)\left(x^2-x-2\right)=(x-2)(x-2)(x+1)=(x-2)^2(x+1)$

Pedagogická poznámka: U předchozího i následujícího příkladu zkoušíme na tabuli různé nápady a ukazujeme si, že mnohé je možné dovést do konce a i špatné nápady jsou užitečné, protože nám pomáhají poznat, jak by takový rozklad měl vypadat, aby v následujícím kroku bylo možné vytknout.

Př. 4: (BONUS) Rozlož na součin mnohočleny.
a) $x^3-12x+16$ b) $2x^2+x-6$

a) $x^3-12x+16$
K x potřebujeme třetí mocninu nějakého čísla, nejspíš $2^3=8$ $\Rightarrow$ rozložíme $16=-8+24$.
$x^3-12x+16=x^3-8-12x+24=x^3-2^3-12(x-2)=(x-2)\left(x^2+2x+4\right)-12(x-2)=$
$(x-2)\left[x^2+2x+4-12\right]=(x-2)\left(x^2+2x-8\right)=(x-2)(x-2)(x+4)$

b) $2x^2+x-6$
Zkusíme rozložit x tak, aby ve vzniklých dvojicích byl stejný poměr mezi větší menší mocninou (po vytknutí pak získáme to samé) $\Rightarrow$ $x=4x-3x$.
$2x^2+x-6=2x^2+4x-3x-6=2x(x+2)-3(x+2)=(x+2)(2x-3)$
Jiné řešení: zkoušíme rozdělit 6: $2x^2+x-6=2x^2-4+x-2=2\left(x^2-2\right)+(x-2)$ v první závorce máme s x^2 příliš malé číslo, pro rozklad $\left(x^2-4\right)$ bychom potřebovali číslo dvakrát větší:
$2x^2+x-6=2x^2-8+x+2=2\left(x^2-4\right)+(x+2)=2(x-2)(x+2)+(x+2)=$
$=(x+2)\left[2(x-2)+1\right]=(x+2)(2x-3)$

Složitější příklady

Při řešení složitějších příkladů musíme použít metody z minulých hodin (vytýkání, vzorec, rozepsání), v některých případech i několikrát, ale před tím bude většinou třeba mnohočlen upravit. Několik rad:

- pokud je možné udělat alespoň částečný rozklad (vytknutím nebo použitím vzorce) uděláme ho, zbytek pak bude snáz vidět,
- pokud je v mnohočlenu kus vzorce, zkusíme ho dodělat,
- na vytýkání je třeba mít dvakrát to samé, musíme tedy mnohočlen upravit tak, aby se v něm něco opakovalo,
- pro částečné vytýkání je dobré dát k sobě členy, které mají něco společného.

Př. 5: Rozlož na součin mnohočleny:

a) $x^5+x^3-x^2-1$ b) $a^2+2ab+b^2-2ac-2bc$

c) $3p^4-p^3+p-3$ d) $8(2x+y)^2-18(x-2y)^2$

a) $x^5+x^3-x^2-1$

Zkusíme z první části s vysokými mocninami udělat to samé, co je v druhé části

$$x^5+x^3-x^2-1=x^3\cdot\left(x^2+1\right)-\left(x^2+1\right)=\left(x^2+1\right)\cdot\left(x^3-1\right)=\left(x^2+1\right).(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)$$

b) $a^2+2ab+b^2-2ac-2bc$

V první části je vzorec, ze zbytku je možné něco vytknout.

$$a^2+2ab+b^2-2ac-2bc=(a+b)^2-2c\cdot(a+b)=(a+b)\cdot\left[(a+b)-2c\right]=(a+b)\cdot(a+b-2c)$$

c) $3p^4-p^3+p-3$

Potřebujeme vyrobit dvakrát to samé $\Rightarrow$ zkusíme dát trojky k sobě.

$$3p^4-p^3+p-3=3p^4-3-p^3+p=3\cdot\left(p^4-1\right)-p\cdot\left(p^2-1\right)=\ldots$$

Zatím nemáme co vytknout, ale mnohočlen $\left(p^4-1\right)$ je možné rozložit.

$$3\cdot\left(p^4-1\right)-p\cdot\left(p^2-1\right)=3\cdot\left(p^2-1\right)\cdot\left(p^2+1\right)-p\cdot\left(p^2-1\right)=\left(p^2-1\right)\cdot\left[3\cdot\left(p^2+1\right)-p\right]=$$

$$=(p-1)\cdot(p+1)\cdot\left(3p^2-p+3\right)$$

d) $8(2x+y)^2-18(x-2y)^2$

Mnohočlen připomíná vzorec a^2-b^2, zkusíme ho vyrobit.

$$8(2x+y)^2-18(x-2y)^2=2\left[4(2x+y)^2-9(x-2y)^2\right]=2\left[\overbrace{\left[2(2x+y)\right]^2}^{a^2}\overbrace{-}^{-}\overbrace{\left[3(x-2y)\right]^2}^{b^2}\right]=$$

$$2\overbrace{\left[2(2x+y)-3(x-2y)\right]}^{(a\;-\;b)}\overbrace{\left[2(2x+y)+3(x-2y)\right]}^{(a\;+\;b)}=2(4x+2y-3x+6y)(4x+2y+3x-6y)=$$

$$=2(x+8y)(7x-4y)$$

Př. 6: Sbírka příklad 7.

Shrnutí: Některé trojčlenné mnohočleny rozložíme tím, že si jeden z členů rozdělíme na dvě části.