

1.8.10 Mnohočleny - shrnutí

Předpoklady: 010809

Důležité znalosti

- Sčítáme a odčítáme pouze členy se stejnými mocninami neznámých.
- Násobíme každý člen s každým.
- Obousměrné vzorce $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.
- $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$, $(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$
- Dělení ve třech krocích:
 - nejvyšší mocninu dělíme nejvyšší mocninou,
 - zpětně násobíme
 - odčteme (a stupeň se sníží o jeden).
- Vytknutím mínus změníme znaménka uvnitř.
- Rozkladové vzorce $A^2 - B^2 = (A-B) \cdot (A+B)$, $a^3 + b^3 = (a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$,
 $a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$.
- $x^2 + 7x + 10 = (x+2) \cdot (x+5)$ - součin měl dát 10 a součet 7.
- $3y^2 + 4y + 1 = 3y^2 + 3y + y + 1 = 3y \cdot (y+1) + (y+1) = (y+1)(3y+1)$

Zádrhele

- Na součin nejde rozložit všechno.
- Při násobení, umocňování a používání vzorců, nesmíme zapomenout na "vnitřky".
- Při vytýkání nesmíme zapomenout na jedničku: $3y \cdot (y+1) + (y+1) = (y+1)(3y+1)$.

Dobré rady

- Držet mnohočleny seřazené podle stupně.
- Vzorce $(a+b)^2$, $(a+b)^3$ mají spoustu pravidelností, které se dají kontrolovat, nemusíme si je pamatovat celé.
- Při dosazování do vzorců a vytýkání používat závorky.

Př. 1: O kolik se zvětší hodnota výrazu $(2-x)^2(x+1)$, když se x zvětší o 2?

Původní hodnota:

$$(2-x)^2(x+1) = (4-4x+x^2)(x+1) = 4x-4x^2+x^3+4-4x+x^2 = x^3-3x^2+4$$

Nová hodnota:

$$(x+2)^3 - 3(x+2)^2 + 4 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 3(x^2 + 4x + 4) + 4 =$$

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 12 - 3x^2 - 12x - 12 = x^3 + 3x^2$$

Zvětšení:

$$x^3 + 3x^2 - (x^3 - 3x^2 + 4) = 6x^2 - 4$$

Př. 2: Zjednoduš $(x-1)^2(x+2)-(x-3)^3$.

$$(x-1)^2(x+2)-(x-3)^3 = (x^2-2x+1)(x+2)-(x^3-3\cdot x^2\cdot 3+3x\cdot 3^2-3^3) = \\ x^3-2x^2+x+2x^2-4x+2-x^3+9x^2-27x+27 = 9x^2-30x+29$$

Př. 3: Rozlož na součin.

a) x^2-5x+6

b) $4x^2-y^4$

c) $x^4+3x^3-x^2-3x$

a) $x^2-5x+6 = (x-3)(x-2)$

b) $4x^2-y^4 = (2x)^2-(y^2)^2 = (2x-y^2)(2x+y^2)$

c) $x^4+3x^3-x^2-3x = x(x^3+3x^2-x-3) = x[x^2(x+3)-(x+3)] = x(x+3)(x^2-1) = \\ x(x+3)(x-1)(x+1)$

Př. 4: Vyděl mnohočleny $(6x^3-5x^2+10x-3):(3x-1)$.

$$\begin{array}{r} (6x^3-5x^2+10x-3):(3x-1) = 2x^2-x+3 \\ \underline{-(6x^3-2x^2)} \\ -3x^2+10x-3 \\ \underline{-(-3x^2+x)} \\ 9x-3 \\ \underline{-(2x-1)} \\ 0 \end{array}$$

Platí: $(6x^3-5x^2+10x-3):(3x-1) = 2x^2-x+3$.

Př. 5: Pomocí vzorce $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ odvoď vzorec pro $(a+b)^4$. Výsledek ověř pomocí vzorce $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$. Bez dalších výpočtů napiš vzorec pro $(a-b)^4$.

$$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b) = (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)\cdot(a+b) = \\ a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3+a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4 = \\ a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

Ověření.

$$(a+b)^4 = (a+b)^2(a+b)^2 = (a^2+2ab+b^2)\cdot(a^2+2ab+b^2) = \\ a^4+2a^3b+a^2b^2+2a^3b+4a^2b^2+2ab^3+a^2b^2+2ab^3+b^4 = \\ a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

Vzorec pro $(a-b)^4$ se od vzorce pro $(a+b)^4$ bude lišit pouze ve znaménkách pro členy s lichými mocninami b : $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$.

Př. 6: Rozlož na součin.

a) $x^2 - x - 30$

b) $4y^2 + 7y + 3$

c) $-x^2 - 3x + 10$

a) $x^2 - x - 30 = (x-6)(x+5)$

b) $4y^2 + 7y + 3 = 4y^2 + 4y + 3y + 3 = 4y(y+1) + 3(y+1) = (y+1)(4y+3)$

c) $-x^2 - 3x + 10 = -(x^2 + 3x - 10) = -(x+5)(x-2)$

Př. 7: Jaké nejmenší hodnoty může nabývat výraz $x^2 + 2x + y^2 + z^2 - 6z$?

Upravujeme na druhé mocniny (které jsou vždy ≥ 0).

$$x^2 + 2x + y^2 + z^2 - 6z = x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 + z^2 - 2z \cdot 3 + 3^2 - 3^2 =$$

$$(x+1)^2 - 1 + y^2 + (z-3)^2 - 9 = (x+1)^2 + y^2 + (z-3)^2 - 10$$

\Rightarrow výraz je vždy větší než -10 .

Př. 8: Vyděl mnohočleny $(x^4 - x^2 + 2) : (2x^2 + 2x + 1)$.

$$(x^4 - x^2 + 2) : (2x^2 + 2x + 1) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

$$-\left(x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)$$

$$-x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$$

$$-\left(-x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x\right)$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 2$$

$$-\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)$$

$$x + \frac{9}{4}$$

Platí: $(x^4 - x^2 + 2) : (2x^2 + 2x + 1) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{4x+9}{4(2x^2+2x+1)}$.

Př. 9: Zjednoduš $(3x-1)^2(x+3)-(2x+3)^3$.

$$(3x-1)^2(x+3)-(2x+3)^3 = (9x^2-6x+1)(x+3) - [(2x)^3 + 3(2x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2x \cdot 3^2 + 3^3] = \\ 9x^3 - 6x^2 + x + 27x^2 - 18x + 3 - (8x^3 + 36x^2 + 54x + 27) = x^3 - 15x^2 - 71x - 24$$

Př. 10: O kolik se zmenší hodnota výrazu $(2x-y)^3 - (2x^2+y^2)(y-x)$, když se x zmenší o 2 a y zvětší o 1?

Původní hodnota výrazu:

$$(2x-y)^3 + (2x^2+y^2)(y-x) = [(2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 y + 3 \cdot 2xy^2 - y^3] + (2x^2y - 2x^3 + y^3 - xy^2) = \\ 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3 + 2x^2y - 2x^3 + y^3 - xy^2 = 6x^3 - 10x^2y + 5xy^2$$

Nová hodnota:

$$6(x-2)^3 - 10(x-2)^2(y+1) + 5(x-2)(y+1)^2 = \\ = 6(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) - 10(x^2 - 4x + 4)(y+1) + 5(x-2)(y^2 + 2y + 1) = \\ = 6x^3 - 36x^2 + 72x - 48 - 10(x^2y - 4xy + 4y + x^2 - 4x + 4) \\ + 5(xy^2 + 2xy + x - 2y^2 - 4y - 2) = 6x^3 - 36x^2 + 72x - 48 \\ - 10x^2y - 40xy + 40y + 10x^2 - 40x - 40 + 5xy^2 + 10xy + 5x - 10y^2 - 20y - 10 = \\ = 6x^3 - 10x^2y + 5xy^2 - 26x^2 - 10y^2 - 30xy + 37x + 20y - 98$$

Zmenšení výrazu.

$$6x^3 - 10x^2y + 5xy^2 - (6x^3 - 10x^2y + 5xy^2 - 26x^2 - 10y^2 - 30xy + 37x + 20y - 98) \\ = 26x^2 + 10y^2 + 30xy - 37x - 20y + 98$$

Shrnutí: