1.9.2 Sčítání a odčítání lomených výrazů I

Předpoklady: 010901

Pedagogická poznámka: V učebnici je sčítání uvedeno v jedné kapitole s násobením. Původně jsem měl také pocit, že bude stačit pět příkladů, ale tahle hodina se stala jednou z mála, při kterých se 4B2011 rozsypala – většina studentů příklady zvládla, ale více než třetina měla vážné problémy. Proto jsem se rozhodl zpomalit postup, nechat na sčítání víc času a nácvik sčítání více rozdrobit do většího množství příkladů, po průchodu s 8O2013 jsem dokonce hodinu rozdělil na dvě části s tím, že do první jsem ještě přidal rozšiřování lomených výrazů z minulé hodiny.

Pedagogická poznámka: S částí hodiny, která se zabývá rozšiřováním nejsem moc spokojený, ale zatím jsem nenašel lepší řešení. Snažím se ji věnovat maximálně dvacet minut, aby zbylo dost času na první příklady se sčítáním.

Rozšiřování (teoreticky probráno v minulé hodině) je potřeba hlavně při sčítání lomených výrazů.

Př. 1: Rozšiř lomené výrazy $\frac{1}{2x}$; $\frac{x}{x+2}$ a $\frac{3}{2x-4}$ tak, aby jejich jmenovatele byly shodné.

Musíme najít společný násobek mnohočlenů ve jmenovatelích.

- $2x = 2 \cdot x$
- $x+2$
- $2x-4 = 2(x-2)$

Nejjednodušší společný násobek je $2 \cdot x \cdot (x+2) \cdot (x-2)$ $\Rightarrow$ rozšiřujeme každý zlomek tím, co mu ve jmenovateli chybí do nejjednoduššího společného násobku.

- $\frac{1}{2x} = \frac{1}{2x} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2-4}{2x(x-2)(x+2)}$
- $\frac{x}{x+2} = \frac{x}{x+2} \cdot \frac{2x(x-2)}{2x(x-2)} = \frac{2x^2(x-2)}{2x(x+2)(x-2)}$
- $\frac{3}{2x-4} = \frac{3}{2(x-2)} \frac{x(x+2)}{x(x+2)} = \frac{3x(x+2)}{2x(x-2)(x+2)}$

Po rozšíření, necháváme čitatel i jmenovatel v součinovém tvaru, k roznásobení závorek přistoupíme pouze v nutném případě.

Př. 2: Rozšiř lomený výraz $\frac{x-1}{2-x}$ tak, aby se jeho jmenovatel rovnal x^2-4.

Dvě možnosti

a) úsporně

Z čeho je x^2-4? $\quad x^2-4=(x-2)(x+2)$ $\Rightarrow$ výraz $x-2$ máme se špatným znaménkem $\Rightarrow$ rozšíříme –1 a pak $x+2$.

$$\frac{x-1}{2-x}=\frac{(x-1)}{(2-x)}\cdot\frac{-1}{-1}=\frac{1-x}{x-2}\cdot\frac{x+2}{x+2}=\frac{2-x-x^2}{x^2-4}$$

b) tupě

Nestaráme se, jestli tam už něco je, rozšíříme výrazem x^2-4 a pak se snažíme krátit.

$$\frac{x-1}{2-x}=\frac{x-1}{2-x}\frac{x^2-4}{x^2-4}=\frac{(x-1)}{(x^2-4)}\frac{(x-2)(x+2)}{2-x}=\frac{(x-1)}{(x^2-4)}\frac{(x-2)(x+2)}{(-1)\cdot(x-2)}$$

$$=\frac{(x-1)(x+2)}{-(x^2-4)}=\frac{2-x-x^2}{x^2-4}$$

Př. 3: Rozšiř lomený výraz $\frac{1}{x+3}$ tak, aby se jeho jmenovatel rovnal x^2-4.

Rozklad jmenovatele, kterého máme získat: $x^2-4=(x-2)(x+2)$ $\Rightarrow$ neobsahuje mnohočlen $x+3$, kterého se nejde zbavit krácením (čitatel původního zlomku je 1) $\Rightarrow$ příklad nejde vyřešit.

Př. 4: Kdy jsou příklady na rozšíření zlomku do tvaru se zadaným jmenovatelem neřešitelné?

Pokud jmenovatel původního zlomku obsahuje výraz, který se nemá vyskytovat v konečném tvaru, a tento výraz není možné vykrátit, je příklad neřešitelný.

Př. 5: Rozšiř lomené výrazy tak, aby v se v jejich jmenovateli vyskytoval výraz v závorce.

a) $\frac{x-1}{x+2}$ $\quad\{x^2+2x\}$

b) $\frac{x-2}{1-x}$ $\quad\{(x-1)\}$

c) $\frac{x-1}{x^2-1}$ $\quad\{(x+1)^2\}$

d) $\frac{x^2-9}{x^2-3x-18}$ $\quad\{x^2-36\}$

a) $x^2+2x=x(x+2)$

$$\frac{x-1}{x+2}=\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{x}{x}=\frac{x^2-x}{x^2+2x}$$

b) $\frac{x-2}{1-x}$ - ve jmenovateli potřebujeme opačné znamínko

$$\frac{x-2}{1-x}\cdot\frac{(-1)}{(-1)}=\frac{2-x}{x-1}$$

c) $\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x+1}\cdot\frac{x+1}{x+1}=\frac{x+1}{(x+1)^2}$

d) $x^2-36=(x-6)(x+6)$

$$\frac{x^2-9}{x^2-3x-18}=\frac{(x-3)(x+3)}{(x-6)(x+3)}=\frac{x-3}{x-6}\cdot\frac{x+6}{x+6}=\frac{x^2+3x-18}{x^2-36}$$

Př. 6: Sbírka příklad 2.

Př. 7: Vypočti: $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$

$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{3}=\frac{8}{12}+\frac{9}{12}=\frac{17}{12}$ - musíme převést na společného jmenovatele (sčítat můžeme pouze stejně velké kousky).

Stejně sčítáme lomené výrazy (mnohočleny, které je tvoří jsou koneckonců jenom čísla)

Př. 8: Doplň větu: „Pro libovolné výrazy $V_1;V_2;V_3;V_4$ a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je $V_2\neq 0;V_4\neq 0$ platí: $\frac{V_1}{V_2}+\frac{V_3}{V_4}=\ldots$“.

Pro libovolné výrazy $V_1;V_2;V_3;V_4$ a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je $V_2\neq 0;V_4\neq 0$ platí: $\frac{V_1}{V_2}+\frac{V_3}{V_4}=\frac{V_1V_4+V_3V_2}{V_2V_4}$.

Společný jmenovatel chceme co nejjednodušší, při výpočtu se nechává kvůli krácení v součinovém tvaru.

Pedagogická poznámka: Na první pohled jsou předchozí příklady (7. a 8.) naprosto zbytečné. Jejich cílem je:
a) naučit studenty, že obecná a abstraktní tvrzení je možné odvodit (nebo si je například sám sobě objasnit) pomocí konkrétních čísel
b) dotlačit je k tomu, aby obecnou větu vůbec vzali na vědomí. Většinou si ji sice napíší, třeba se ji i naučí, ale vodítko na příklady čekají od konkrétního příkladu.

Př. 9: Sečti lomené výrazy.

a) $\frac{2}{x}+\frac{x}{3}+4$

b) $\frac{3}{x}+\frac{y}{3x}+\frac{4}{y+1}$

c) $\frac{x+1}{x}+\frac{x}{x+1}$

d) $\frac{1}{x-1}+\frac{x}{x+1}+\frac{3-x^2}{(x+1)(x-1)}$

a)
Podmínky: $x\neq 0$.
Nejjednodušší společný jmenovatel: $3\cdot x$.

$$\frac{2}{x}+\frac{x}{3}+4=\frac{2}{x}\cdot\frac{3}{3}+\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{x}+4\cdot\frac{3x}{3x}=\frac{6}{3x}+\frac{x^2}{3x}+\frac{12x}{3x}=\frac{x^2+12x+6}{3x}$$

b)
Podmínky: $x \neq 0$, $y+1 \neq 0 \Rightarrow y \neq -1$.

Nejjednodušší společný jmenovatel: $3x(y+1)$.

$$\frac{3}{x}+\frac{y}{3x}+\frac{4}{y+1}=\frac{3}{x}\cdot\frac{3(y+1)}{3(y+1)}+\frac{y}{3x}\cdot\frac{y+1}{y+1}+\frac{4}{y+1}\cdot\frac{3x}{3x}=\frac{9y+9+y^2+y+12x}{3x(y+1)}=$$

$$=\frac{y^2+10y+12x+9}{3x(y+1)}$$

c)
Podmínky: $x \neq 0$, $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$.
Nejjednodušší společný jmenovatel: $x \cdot (x+1)$.

$$\frac{x+1}{x}+\frac{x}{x+1}=\frac{x+1}{x}\cdot\frac{x+1}{x+1}+\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x}{x}=\frac{x^2+2x+1}{x(x+1)}+\frac{x^2}{x(x+1)}=\frac{2x^2+2x+1}{x(x+1)}$$

d)
Podmínky: $x \neq 1$, $x \neq -1$.
Nejjednodušší společný jmenovatel: $(x+1)(x-1)$.

$$\frac{1}{x-1}+\frac{x}{x+1}+\frac{3-x^2}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x-1}\cdot\frac{x+1}{x+1}+\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x-1}{x-1}+\frac{3-x^2}{(x+1)(x-1)}=$$

$$=\frac{x+1+x^2-x+3-x^2}{(x+1)(x-1)}=\frac{4}{(x+1)(x-1)}$$

Př. 10: Sbírka příklad 3.

Shrnutí: Sčítání i odčítání lomených výrazů provádíme podobně jako sčítání a odčítání zlomků.