

1.9.3 Sčítání a odčítání lomených výrazů II

Předpoklady: 010902

POZOR: mínus před zlomkem patří ke všem číslům ve zlomku \Rightarrow

- toto je dobře: $-\frac{x-1}{x+2} = \frac{-(x-1)}{x+2} = \frac{-x+1}{x+2} = \frac{-x}{x+2} + \frac{1}{x+2} = -\frac{x}{x+2} + \frac{1}{x+2}$
- toto je špatně: $-\frac{x-1}{x+2} = \frac{-x}{x+2} + \frac{-1}{x+2} = -\frac{x}{x+2} - \frac{1}{x+2}$

Př. 1: Najdi chybu v následujícím postupu.

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+1} - \frac{2}{x} + \frac{2x-1}{2x} &= \frac{x}{x+1} - \frac{4+2x-1}{2x} = \frac{x}{x+1} - \frac{2x+3}{2x} = \frac{2x \cdot x - (2x+3)(x+1)}{2x(x+1)} = \\ &= \frac{2x^2 - (2x^2 + 3x + 2x + 3)}{2x(x+1)} = -\frac{5x+3}{2x^2+2x} \end{aligned}$$

Chyba je hned za první rovností. Tím, že jsme druhý a třetí zlomek spojili, se čísla z třetího zlomku ocitla uvnitř zlomku, před kterým je mínus \Rightarrow měli jsme změnit jejich znaménka. Správné možnosti:

- $\frac{x}{x+1} - \frac{2}{x} + \frac{2x-1}{2x} = \frac{x}{x+1} - \frac{4-2x+1}{2x}$, protože $-\frac{4-2x+1}{2x} = -\left(\frac{4}{2x} + \frac{-2x+1}{2x}\right) = -\frac{2}{x} - \frac{-2x+1}{2x} = -\frac{2}{x} + \frac{2x-1}{2x}$
- nebo: $\frac{x}{x+1} - \frac{2}{x} + \frac{2x-1}{2x} = \frac{x \cdot 2x - 2 \cdot 2(x+1) + (x+1)(2x-1)}{2(x+1)x}$ - to je asi nejlepší řešení, před zlomkem, ve kterém všechno spojujeme, je plus a proto nedochází k žádným změnám znamének

\Rightarrow Při spojování zlomků je nejvýhodnější spojit zlomky do jednoho, před nímž není znaménko mínus, aby nedocházelo ke změnám (a tím i chybám) ve znaménkách.

Př. 2: Sečti lomené výrazy:

a) $\frac{x}{3} - \frac{x}{x+2} - 2$

b) $\frac{x}{x+2} - \frac{x+1}{x-3}$

c) $\frac{x+1}{x} + \frac{x-2}{2x} - 2x+1$

d) $\frac{2-3x^2}{x-1} - \frac{2x-1}{2x} - 2+3x$

a)

Podmínky: $x \neq -2$.

Nejjednodušší společný jmenovatel: $3(x+2)$.

$$\frac{x}{3} - \frac{x}{x+2} - 2 = \frac{x}{3} \cdot \frac{x+2}{x+2} - \frac{x}{x+2} \cdot \frac{3}{3} - 2 \cdot \frac{3(x+2)}{3(x+2)} = \frac{x^2+2x-3x-6x-12}{3(x+2)} = \frac{x^2-7x-12}{3(x+2)}$$

b)

Podmínky: $x \neq -2$, $x \neq 3$.

Nejjednodušší společný jmenovatel: $(x+2)(x-3)$.

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+2} - \frac{x+1}{x-3} &= \frac{x(x-3) - (x+1)(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \frac{x^2 - 3x - (x^2 + 2x + x + 2)}{(x+2)(x-3)} = \\ &= \frac{x^2 - 3x - x^2 - 3x - 2}{(x+2)(x-3)} = \frac{-6x - 2}{(x+2)(x-3)} = -\frac{6x+2}{(x+2)(x-3)} \end{aligned}$$

c)

Podmínky: $x \neq 0$.

Nejjednodušší společný jmenovatel: $2 \cdot x$.

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x} + \frac{x-2}{2x} - 2x+1 &= \frac{2(x+1) + x-2 + 2x(-2x+1)}{2x} = \frac{2x+2+x-2-4x^2+2x}{2x} = \\ &= \frac{-4x^2+5x}{2x} = \frac{x(-4x+5)}{2x} = \frac{-4x+5}{2} = -2x + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

d)

Podmínky: $x \neq 0$, $x \neq 1$.

Nejjednodušší společný jmenovatel: $2x(x-1)$.

$$\begin{aligned} \frac{2-3x^2}{x-1} - \frac{2x-1}{2x} - 2+3x &= \frac{2x(2-3x^2) - (x-1)(2x-1) + 2x(x-1)(-2+3x)}{2x(x-1)} = \\ &= \frac{4x-6x^3 - (2x^2-3x+1) + 2x(3x^2-5x+2)}{2x(x-1)} = \\ &= \frac{7x-6x^3-2x^2-1+6x^3-10x^2+4x}{2x(x-1)} = \frac{-12x^2+11x-1}{2x(x-1)} \end{aligned}$$

Pedagogická poznámka: Nejvíce chyb vzniká v bodě c), kde studenti píšou

$$-2x+1 = -\frac{2x(2x+1)}{2x}.$$

Př. 3: Sečti lomené výrazy:

a) $\frac{y}{y^2-x^2} - \frac{x}{x-y}$

b) $\frac{a+b}{a} - \frac{a}{a-b} + \frac{b^2}{a^2-ab}$

c) $\frac{8-5x}{8+2x-x^2} - \frac{2x+2}{x^2-3x-4}$

a)

Podmínky: $x \neq y$, $x^2 \neq y^2$.

Nejjednodušší společný jmenovatel: $y^2 - x^2 = (y-x)(y+x)$, $x-y = -(y-x) \Rightarrow$ společný jmenovatel $y^2 - x^2 \Rightarrow$ ve druhém zlomku budeme muset vytknout mínus.

$$\frac{y}{y^2-x^2} - \frac{x}{x-y} = \frac{y}{(y-x)(y+x)} - \frac{x}{-(y-x)} = \frac{y}{(y-x)(y+x)} + \frac{x}{(y-x)} \cdot \frac{y+x}{y+x} =$$

$$= \frac{y}{(y-x)(y+x)} + \frac{yx+x^2}{y^2-x^2} = \frac{x^2+yx+y}{y^2-x^2}$$

b)

Podmínky: $a \neq 0$, $a-b \neq 0 \Rightarrow a \neq b$.

Nejjednodušší společný jmenovatel: $a^2 - ab = a(a-b)$.

$$\frac{a+b}{a} - \frac{a}{a-b} + \frac{b^2}{a^2-ab} = \frac{a+b}{a} - \frac{a}{a-b} + \frac{b^2}{a(a-b)} = \frac{(a+b)(a-b)}{a(a-b)} - \frac{a \cdot a}{(a-b)a} + \frac{b^2}{a(a-b)} =$$

$$\frac{a^2 - b^2 - a^2 + b^2}{a(a-b)} = 0$$

c)

Podmínky: $8+2x-x^2 \neq 0$, $x^2-3x-4 \neq 0$.

Nejjednodušší společný jmenovatel \Rightarrow musíme rozložit jmenovatele zlomků:

- $8+2x-x^2 = -(x^2-2x-8) = -(x-4)(x+2)$
- $x^2-3x-4 = (x-4)(x+1)$ - zlomek jde ještě zkrátit \Rightarrow

nejjednodušší společný jmenovatel: $(x-4)(x+2)$.

$$\frac{8-5x}{8+2x-x^2} - \frac{2x+2}{x^2-3x-4} = \frac{8-5x}{-(x-4)(x+2)} - \frac{2(x+1)}{(x-4)(x+1)} =$$

$$= -\frac{8-5x}{(x-4)(x+2)} - \frac{2}{(x-4)} \cdot \frac{x+2}{x+2} = -\frac{8-5x}{(x-4)(x+2)} - \frac{2x+4}{(x-4)(x+2)} =$$

$$= \frac{-(8-5x)-(2x+4)}{(x-4)(x+2)} = \frac{3x-12}{(x-4)(x+2)} = \frac{3(x-4)}{(x-4)(x+2)} = \frac{3}{x+2}$$

Pedagogická poznámka: V bodě a) mají studenti problém s mínusem, který vyrobí při úpravě jmenovatele ve druhém zlomku. Někteří další raději zanedbají, že výrazy $(x-y)$ a $(y-x)$ nejsou stejné, a jiní se snaží upravit (špatně) první zlomek. V bodě b) se pak (pro mě překvapivě i u hodně dobrých studentů) objevuje $\frac{a^2-b^2-a^2+b^2}{a(a-b)} = \frac{1}{a(a-b)}$, kde studenti nerozlišují mezi krácením a odčítáním (a přijde jim divné, že by z něčeho tak velkého vznikla nula).

Př. 4: Sbírka příklad 4.
Sbírka příklad 5.

Shrnutí: Mínus před zlomkem platí pro všechna čísla ve zlomku.