

1.9.4 Násobení a dělení lomených výrazů

Předpoklady: 010903

Násobení lomených výrazů

Př. 1: Najdi vhodný příklad násobení dvou zlomků a doplň větu: „Pro libovolné výrazy $V_1; V_2; V_3; V_4$ a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je $V_2 \neq 0; V_4 \neq 0$

$$\text{platí: } \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_3}{V_4} = \dots \text{“}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$$

Pro libovolné výrazy $V_1; V_2; V_3; V_4$ a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž

je $V_2 \neq 0; V_4 \neq 0$ platí: $\frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1 \cdot V_3}{V_2 \cdot V_4}$.

Výrazy neroznásobujeme, ale snažíme se je co nejvíce pokrátit (někdy se musí i rozkládat).

Př. 2: Urči součiny.

a) $\frac{5x^2}{2y^3} \cdot \frac{4y^2}{15x}$

b) $\frac{3y-6}{3x} \cdot \frac{6x^2}{5y-10}$

c) $\frac{x^2-1}{x^2+xy} \cdot \frac{x^2+2xy+y^2}{(x+1)^2} \cdot \frac{x^2+x}{yx-y}$

d) $\left(1 - \frac{a}{1+a}\right) \cdot \frac{1-a^2}{1-b} \cdot \frac{1-b^2}{a^2-a}$

e) $(x^2-1) \cdot \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - 1\right)$

a) $x \neq 0; y \neq 0$

$$\frac{5x^2}{2y^3} \cdot \frac{4y^2}{15x} = \frac{5x^2}{2y^3} \cdot \frac{2 \cdot 2y^2}{5 \cdot 3x} = \frac{2x}{3y}$$

b) $x \neq 0, 5y-10 \neq 0 \Rightarrow 5y \neq 10 \Rightarrow y \neq 2$

$$\frac{3y-6}{3x} \cdot \frac{6x^2}{5y-10} = \frac{3(y-2)}{3x} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot x^2}{5(y-2)} = \frac{3 \cdot 2 \cdot x}{5} = \frac{6}{5}x$$

c) $x^2+xy \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq -xy; x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1; yx-y \neq 0 \Rightarrow yx \neq y$

$$\frac{x^2-1}{x^2+xy} \cdot \frac{x^2+2xy+y^2}{(x+1)^2} \cdot \frac{x^2+x}{yx-y} = \frac{(x-1)(x+1)}{x(x+y)} \cdot \frac{(x+y)^2}{(x+1)^2} \cdot \frac{x(x+1)}{y(x-1)} = \frac{x+y}{y}$$

d) $1+a \neq 0 \Rightarrow a \neq -1; 1-b \neq 0 \Rightarrow b \neq 1; a^2-a \neq 0 \Rightarrow a^2 \neq a$

První závorku musíme upravit na zlomek, u kterého je jasné, co je čítec a co jmenovatel, než začneme násobit a krátit.

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{a}{1+a}\right) \cdot \frac{1-a^2}{1-b} \cdot \frac{1-b^2}{a^2-a} = \left(\frac{1+a}{1+a} - \frac{a}{1+a}\right) \cdot \frac{(1-a)(1+a)}{1-b} \cdot \frac{(1-b)(1+b)}{a(a-1)} = \\ & = \frac{1}{1+a} \cdot \frac{-(a-1)(1+a)}{a} \cdot \frac{(1+b)}{(a-1)} = -\frac{1+b}{a} \end{aligned}$$

e) $x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$; $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

$$\begin{aligned} & (x^2-1) \cdot \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - 1\right) = (x-1)(x+1) \cdot \left(\frac{(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{(x-1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}\right) = \\ & (x-1)(x+1) \cdot \frac{(x+1) - (x-1) - (x^2-1)}{(x-1)(x+1)} = (x+1) - (x-1) - (x^2-1) = 3 - x^2 \end{aligned}$$

Pedagogická poznámka: I přes upozornění se určitě najde někdo, kdo místo krácení začne roznásobovat. Chvilku je nechám, aby si dopočítali strašlivé výsledky, ke kterým tento přístup vede.

V bodě d) je potřeba dát pozor, aby studenti před násobením a krácením připočetli do zlomku, někteří také zapomenou před krácením výrazů $a-1$ vytknout mínus.

V bodě e) je nejvíce chyb kvůli mínusům před zlomky.

Umocňování lomených výrazů

Př. 3: Doplně větu: „Pro libovolné výrazy $V_1; V_2$ a pro libovolné přirozené číslo k a pro

všechny hodnoty proměnných, pro něž je $V_2 \neq 0$ platí: $\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^k = \dots$ “.

Umocňování zlomků $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9} \Rightarrow$ stejně u lomených výrazů (jsou to jen čísla).

Pro libovolné výrazy $V_1; V_2$ a pro libovolné přirozené číslo k a pro všechny

hodnoty proměnných, pro něž je $V_2 \neq 0$ platí: $\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^k = \frac{V_1^k}{V_2^k}$.

Př. 4: Uprav lomený výraz $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 \left(\frac{y}{x-1}\right)^2 \left(\frac{x^2-1}{2xy}\right)^2$.

$x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$; $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$; $x \neq 0$; $y \neq 0$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 \left(\frac{y}{x-1}\right)^2 \left(\frac{x^2-1}{2xy}\right)^2 = \frac{x^2}{(x+1)^2} \frac{y^2}{(x-1)^2} \left[\frac{(x-1)(x+1)}{2xy}\right]^2 = \\ & = \frac{x^2}{(x+1)^2} \frac{y^2}{(x-1)^2} \frac{(x-1)^2 (x+1)^2}{2^2 x^2 y^2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Pedagogická poznámka: Těm, kteří mají problémy s rozkladem výrazu $(x^2 - 1)^2$, radím, aby si vnější mocninu napsali jako součin.

Dělení lomených výrazů

Př. 5: Pomocí analogie s výpočty se zlomky doplň větu: „Pro libovolné výrazy $V_1; V_2; V_3; V_4$ a platí: $\frac{V_1}{V_2} : \frac{V_3}{V_4} = \dots$ “

Dělení zlomků $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{5}{6} \Rightarrow$ stejně u lomených výrazů (jsou to jen čísla).

Pro libovolné výrazy $V_1; V_2; V_3; V_4$ a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž

$$\text{je } V_2 \neq 0; V_3 \neq 0; V_4 \neq 0 \text{ platí: } \frac{V_1}{V_2} : \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_4}{V_3} = \frac{V_1 \cdot V_4}{V_2 \cdot V_3}.$$

Výrazy neroznásobujeme, ale snažíme se je co nejvíce pokrátit (někdy se musí i rozkládat).

Proč se zlomek při dělení obrací?

Platí: $2 : \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{2}{1} = 4 \Rightarrow$ stejně u výrazů: $V = \dots \cdot \frac{1}{V}$.

Počítáme: $\frac{V_1}{V_2} : \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{1}{\frac{V_3}{V_4}} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{1}{\frac{V_3}{V_4} \cdot \frac{V_4}{V_4}} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_4}{\frac{V_3 \cdot V_4}{V_4}} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_4}{V_3} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_4}{V_3} = \frac{V_1 V_4}{V_2 V_3}$.

Př. 6: Urči podíly.

a) $\frac{2x^2}{3y} : \frac{4x^2}{15y^2}$

b) $\frac{12a^2b^2}{14x^2y^3} : \frac{18a^2b}{21x^3y^2}$

c) $\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2} : \frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}$

d) $\frac{x^3-x^2y}{y+y^2} : \frac{y^3-y^2x}{xy+x}$

e) $\left(v + \frac{u-v}{1+uv} \right) : \left[1 - \frac{v(u-v)}{1+uv} \right]$

a) Podmínky: $y \neq 0$; $x \neq 0$ (čitatel zlomku, kterým dělíme, také nesmí být nula).

$$\frac{2x^2}{3y} : \frac{4x^2}{15y^2} = \frac{2x^2}{3y} \cdot \frac{15y^2}{4x^2} = \frac{2x^2}{3y} \cdot \frac{3 \cdot 5y^2}{2 \cdot 2x^2} = \frac{5}{2}y$$

b) Podmínky: $x \neq 0$; $y \neq 0$; $a \neq 0$; $b \neq 0$ (čitatel zlomku, kterým dělíme, také nesmí být nula).

$$\frac{12a^2b^2}{14x^2y^3} : \frac{18a^2b}{21x^3y^2} = \frac{12a^2b^2}{14x^2y^3} \cdot \frac{21x^3y^2}{18a^2b} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot b}{2 \cdot 7y} \cdot \frac{3 \cdot 7 \cdot x}{2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{bx}{y}$$

c) Podmínky: $a^2 \neq b^2$; $a \neq b$ (čitatel zlomku, kterým dělíme, také nesmí být nula).

$$\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2} : \frac{a^2+b^2}{(a-b)^2} = \frac{(a+b)^2}{a^2-b^2} \cdot \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2} = \frac{(a+b)(a+b)}{(a+b)(a-b)} \cdot \frac{(a-b)(a-b)}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

d) Podmínky: $y \neq y^2$; $xy \neq -x$; $y^3 \neq y^2x$ (čitatel zlomku, kterým dělíme, také nesmí být nula).

$$\frac{x^3-x^2y}{y+y^2} : \frac{y^3-y^2x}{xy+x} = \frac{x^3-x^2y}{y+y^2} \cdot \frac{xy+x}{y^3-y^2x} = \frac{x^2(x-y)}{y(1+y)} \cdot \frac{x(y+1)}{y^2(y-x)} = \frac{x^3}{y^3} \cdot \frac{(x-y)}{-(x-y)} = -\frac{x^3}{y^3}$$

e) Podmínky: $uv \neq -1$, další určíme později, nevíme ještě, jaký je například čitatel druhého zlomku.

$$\left(v + \frac{u-v}{1+uv}\right) : \left[1 - \frac{v(u-v)}{1+uv}\right] = \left(\frac{v(1+uv) + (u-v)}{1+uv}\right) : \left[\frac{1+uv - v(u-v)}{1+uv}\right] =$$

$$\frac{v+uv^2+u-v}{1+uv} : \frac{1+uv-vu+v^2}{1+uv} = \frac{uv^2+u}{1+uv} : \frac{1+v^2}{1+uv} = \frac{u(v^2+1)}{1+uv} \cdot \frac{1+uv}{1+v^2} = u$$

Podmínky: čitatel druhého zlomku je $1+v^2$ a je vždy různý od nuly.

\Rightarrow Podmínky je často vhodnější určovat až po upravení výrazu (nesmíme ale zapomenout na výrazy, které se při upravování vykrátí).

Př. 7: Sbíрка příklad 7.
Sbíрка příklad 8.

Shrnutí: Při násobení a dělení lomených výrazů používáme analogické postupy jako u zlomků.